$L(X)$: Verband (!) der $\mathbb{R}$-wertigen Lebesgue-int.baren Fkten auf X. (D.h. man hat $(\mathcal{B}, I)$, betrachtet L-int.bare Fkten, $L(X) = L(X, \mathcal{B}, I)$)

← Permanenzeigenschaften

$\hat{L}(X)$: $\hat{\mathbb{R}}$-wertige L-int.bare Fkten

<u>Satz von Beppo Levi:</u> Sei $f_n (\nearrow f)$ <u>monotone</u> Folge L-int.barer Fkten $f_n \in \hat{L}(X)$.

Dann ist $I(f_n)$ eine mon. wachsende Folge reeller Zahlen.

Ist $k := \sup_n I(f_n) < \infty$,

dann ist die punktw. Grenzfkt $f = \sup_n f_n$ in $\hat{L}(X)$, und es gilt $\underline{I(f)} = I(\sup_n f_n)$

$= \sup_n I(f_n) \underline{= k}$

(Ditto $f_n \searrow f$, $k := \inf I(f_n) < \infty \Rightarrow$ pktw. Grenzfkt $f = \inf f_n \in \hat{L}(X)$ mit $I(f) = k$.)

<u>D.h.:</u> $L^+(X) = L(X) = L^-(X)$ (monotone Hüllen)

<u>Anwendungsbsp:</u> Uneigentliche Integrale von Fkten ohne VZ-Wechsel

<u>Zusatz:</u> Ist $k = \infty$, dann ist $f \notin \hat{L}(X)$, denn die f_n definieren eine Folge in $L^-(X)$ mit $f_n \leq f$. $\Rightarrow I^b(f) = \infty \Rightarrow f$ nicht L-intbar.

Wiederholung

(B, I)

$B = B(X) \ni f$ mit $I(f) < \infty$

$I^-(f) > -\infty$ mit $f \in B^-$ $\qquad$ $B^+ \ni f$ mit $I^+(f) < \infty$

solche f sind auch L-int.bar.

$B^- \ni h \le f \le g \in B^+$ $\qquad$ (irgendeine Fkt $X \to \hat{\mathbb{R}}$)

$$I^\flat(f) = \sup\{I^-(h) \mid h \in B^-, h \le f\}$$

$$I^\#(f) = \sup\{I^+(g) \mid g \in B^+, f \le g\}$$

$f \in$ L-intbar $\iff I^\flat(f) = I^\#(f) \neq \pm\infty$

alle solchen f bilden Verband $\hat{L}(X)$,

die L-intbaren $f: X \to \mathbb{R}$ bilden Teilverband $L(X)$.

$\mathbb{R}$-VR, abg. bzgl min/max Bildung.

Insbes. $f \in \hat{L}(X) \Rightarrow |f| \in \hat{L}(X)$.

Bsp: $\chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

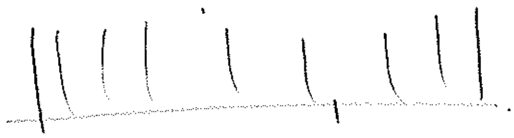
Beh: $\chi_{\mathbb{Q}} \in L(\mathbb{R})$ und $\int_{\mathbb{R}} \chi_{\mathbb{Q}}(x)\,dx = 0$.

Bew: Wende Beppo Levi an.

Dazu wähle irgendeine Abzählung (Bijektion)

$$g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

Setze $f_n = \sum_{k=0}^{n} \chi_{[A(k),A(k)]}(x)$



Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $f_n \in T(\mathbb{R})$ Treppenfkt kollabierte Quader.

$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Es gilt $f_n \nearrow \chi_{\mathbb{Q}} \overset{B.L.}{\Longrightarrow} \chi_{\mathbb{Q}} \in \hat{L}(X)$

sogar $\chi_{\mathbb{Q}} \in L(X)$, da Werte endlich,

und $\int_{\mathbb{R}} \chi_{\mathbb{Q}}(x)\,dx = \sup_n \int f_n(x)\,dx = 0$.

[Wir haben $\mathbb{Q}$ ausgeschöpft: $\mathbb{Q} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$,

wo $A_n \subset A_{n+1} \subset \dots$, $A_n = g([0,n])$.]

Satz v. Lebesgue / Satz v. d. dominierten Konvergenz:

Sei $f_n \to f$ pktw. konv. Funktionenfolge in $\hat{L}(X)$ derart, das eine (von n unabh.) Fkt $F \in \hat{L}(X)$ existiert mit:

$$|f_n| \le F \quad \text{f.a. } n \in \mathbb{N}.$$

Dann ist $f \in \hat{L}(X)$ und es ist $I(f) = \lim_{n\to\infty} I(f_n)$.

Bsp: $f(x) = \begin{cases} \sin x \cdot x^{\alpha}, & x \ge 2\pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$, $\boxed{\alpha < -1 \text{ fest}}$

Mit $f_n(x) = \chi_{[2\pi, 2\pi n]}(x) \cdot \sin x$

gilt: $f_n \in L(X)$; $f_n \to f$ pktw.

$$|f_n| \le \left\{ \begin{matrix} x^{\alpha} & , x \ge 2\pi \\ 0 & \text{sonst} \end{matrix} \right\} =: F(x)$$

(s. letzte Sitzung:) $\displaystyle\int_{2\pi}^{\infty} x^{\alpha}\,dx = \frac{1}{\alpha+1}\, x^{\alpha+1}\Big|_{2\pi}^{\infty} = \frac{1}{\alpha+1}\left(\lim_{R\to\infty} R^{\overbrace{\alpha+1}^{<0}} - 2\pi^{\alpha+1}\right)$

$$= -\frac{2\pi^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad (>0),$$

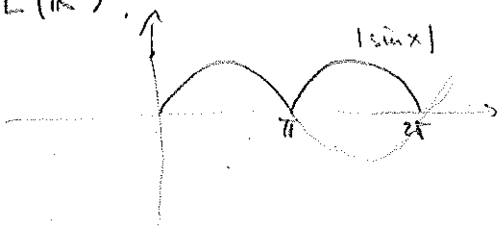
d.h. $F \in L(X)$

Somit ist $f \in L(X)$.

Bsp: $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x \leq 0 \end{cases}$

Beh: $f \notin L(\mathbb{R})$

Bew: Wäre $f \in L(\mathbb{R})$, dann auch $|f| \in L(\mathbb{R})$.



Bemerke:

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \geq \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x| \, dx$$

auf $[k\pi, (k+1)\pi]$ ist $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{(k+1)\pi}$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \sin x \, dx \quad (k \text{ gerade}) & = \frac{1}{(k+1)\pi} \cos x \Big|_{k\pi}^{(k+1)\pi} \\ \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} (-\sin x) \, dx \quad (k \text{ ungerade}) & = \frac{1}{(k+1)\pi} (-\cos x) \Big|_{k\pi}^{(k+1)\pi} \end{array} \right\} = \frac{2}{(k+1)\pi}$$

Es ist $\quad f_n(x) = \left| \frac{\sin x}{x} \right| \cdot \chi_{[0, n\pi]}(x) \quad \in B(\mathbb{R})$

mit $\quad f_n \nearrow |f| \quad$ und

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x) \, dx = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{(k+1)\pi} = \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$$

D.h. $\quad \sup \left(\int f_n \right) = +\infty \quad \Longrightarrow I^b(|f|) = +\infty$

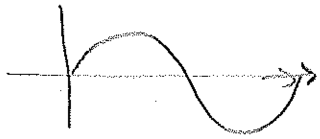
$$\Longrightarrow |f| \notin L(\mathbb{R})$$

$$\Longrightarrow f \notin L(\mathbb{R})$$

Beachte: Hingegen existiert z.B.

$$\lim_{n\to\infty} I_n \quad , \quad I_n := \int_0^{2\pi\cdot n} \frac{\sin x}{x}\,dx \quad , n>0 .$$

Beachte $\displaystyle\int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} \frac{\sin x}{x}\,dx > 0$,



also ist $\displaystyle I_n \nearrow \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$

$$I_n = \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx}_{=C} + \int_{2\pi}^{2\pi n} \frac{\sin x}{x}\,dx ,$$

ex. als Int. einer stückw. stetigen Fkt

$$\int_{2\pi}^{2\pi n} \frac{\sin x}{x}\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{part. Int.} \\ \sin = -\cos'}}{=} -\frac{\cos x}{x}\Big|_{2\pi}^{2\pi n} - \int_{2\pi}^{2\pi n} \frac{-\cos x}{-x^2}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2\pi n} + \frac{1}{2\pi} - \int_{2\pi}^{2\pi n} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \int_{2\pi}^{2\pi n} \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{-1}{x}\Big|_{2\pi}^{2\pi n} = \frac{1}{2\pi}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2\pi}\left(1-\frac{1}{n}\right) = \frac{1-\frac{1}{n}}{\pi} .$$

$$\Rightarrow 0 \leq I_n \leq C + \frac{1-\frac{1}{n}}{\pi} < C + \frac{1}{\pi}$$

Also ist I_n eine monotone, beschränkte Folge, die somit konvergiert

Aber: Wir können $\frac{\sin x}{x}$ nicht durch Fkten aus B^+ / B^- approximieren.