Plenarübung Ana II

26. 4. 2016

Für heute: (X, d) metrischer Raum

D.h.: X Menge mit Abb.

$d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ so, dass $\forall x,y,z \in X$:

(i) $d(x,y) = d(y,x)$
(ii) $d(x,y) = 0 \iff x = y$
(iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

<u>Def</u>: ~~E~~Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt <u>offen</u>, wenn für jedes $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ existiert so, dass die <u>Kugel</u>

$$K_\varepsilon(x) := \{ y \in X \mid d(y,x) < \varepsilon \}$$ in U enthalten ist.

<u>Bsp</u>: (i) $X = \mathbb{R}$ und $\overset{a,b \in \mathbb{R}}{\forall}$ $(a,b) = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \}$ "<u>offenes Intervall</u>".
(Metrik durch eukl. Norm geg.)

Denn: sei $\varepsilon = \varepsilon(x) = \min\{ |x-a|, |x-b| \} > 0$ für $x \in (a,b)$.
Die Kugel $K_{\varepsilon(x)}(x) = \{ y \in \mathbb{R} \mid |y-x| < \varepsilon(x) \}$ gehört zu (a,b):

$$|y-x| < \varepsilon(x) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lll} y-x < \underbrace{b-x}_{>0} & \iff & y < b \\ x-y < \underbrace{x-a}_{>0} & \iff & a < y \end{array} \right\} \begin{array}{l} \iff a<y<b \\ \iff y \in (a,b). \end{array}$$

(ii) $\emptyset \subset X$ leere Menge ist offen, denn für alle $x \in \emptyset$ ist Bed. d. Def. erfüllt.

(iii) $X \subset X$ metr. Raum selbst ist offen: Jede $K_\varepsilon(x)$-Kugel gehört per Def. zu X.

(iv) $K_\varepsilon(x)$ ist offen $\qquad K_{\varepsilon'}(x') \subset K_\varepsilon(x)$ für $\varepsilon' = \frac{1}{2}(\varepsilon - d(x,x'))$

<u>Übungsblatt</u>: Dort ist Metrik von X n. Vor. so geg., dass die Mengen $\{x\} \subset X$, $x \in X$, offen sind.

Def: Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt <u>abgeschlossen</u>, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A, die in X konvergiert, $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in X$, sogar schon x in A liegt.

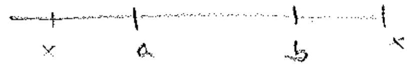
<u>Bsp:</u> (i) $X = \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$ "<u>abgeschl. Int.</u>".

<u>Bew:</u> Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $[a,b]$ mit Grenzwert $x \in \mathbb{R}$.

Ang., $x \notin [a,b]$. Dann ist $\varepsilon_a := |x-a| > 0$ und $\varepsilon_b := |x-b| > 0$

<u>und</u> entweder $K_{\varepsilon_a}(x) \cap [a,b] = \emptyset$,

oder $K_{\varepsilon_b}(x) \cap [a,b] = \emptyset$.



Da $\lim x_n = x$, ex. aber zu $\varepsilon_a > 0$ ein $N_a \in \mathbb{N}$ ($\varepsilon_b > 0$ ein $N_b \in \mathbb{N}$) so, dass f.a. $n > N_a$ ($n > N_b$) gilt

$$|x_n - x| < \varepsilon_a \qquad (|x_n - x| < \varepsilon_b)$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$x_n \in K_{\varepsilon_a}(x) \qquad x_n \in K_{\varepsilon_b}(x) \qquad ⚡.$$

(ii) Sei $U \subset X$ offen. Dann ist $A := X \setminus U$ abgeschlossen und umgekehrt.

<u>Beweis:</u> Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in A mit Grenzwert $x \in X$.

"$\Rightarrow$": sei U offen. Ang., $x \notin A$, d.h. $x \in U$. Da U offen ex. $\varepsilon > 0$ so, dass $K_\varepsilon(x) \subset U$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$: $x_n \notin K_\varepsilon(x)$, ⚡

(iii) Insbes. sind $X = X \setminus \emptyset$ und $\emptyset = X \setminus X$ <u>abgeschlossen</u> <u>und</u> <u>offen</u>!

"$\Leftarrow$": Sei $A = X \setminus U$ abg. Sei $y \in U$. Dann gilt für alle $x \in A$: $d(x,y) > 0$ und sogar $\varepsilon(y) := \inf_{x\in A} d(x,y) > 0$. (Denn "$=0$" würde implizieren, dass eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A mit Grenzwert $y \notin A$ ex. ⚡). Dann ist $K_{\varepsilon(y)}(y) \cap A = \emptyset$, also $K_{\varepsilon(y)}(y) \subset U$. Da $y \in U$ bel., folgt: U ist offen

$\square$

Lemma 1: (a) Bel. Vereinigungen von offenen Mengen sind offen. (Sei I irgendeine Index-Menge beliebiger Kardinalität, und für $i \in I$ jeweils $U_i \subset X$ offen geg. Dann ist $\bigcup_{i\in I} U_i \subset X$ offen.) ③

(b) Endliche Schnitte von offenen Mengen sind offen. (Sei $I = \{1, \ldots, n\}$ endl. Indexmenge, und für $i \in I$ jew. $U_i \subset X$ offen geg. Dann ist $\bigcap_{i\in I} U_i = \bigcap_{i=1}^{n} U_i$ offen.)

Lemma 2: (a) Bel. Schnitte von abg. Mengen sind abgeschlossen (Sei I bel. Indexmenge, $A_i \subset X$ abg für $i \in I$ geg. Dann ist $\bigcap_{i\in I} A_i$ abg.)

(b) Endl. Vereinigungen von abg. Mengen sind abgeschlossen. (Sei $I = \{1, \ldots, n\}$ und für alle $i \in I$ $A_i \subset X$ abg. geg., dann ist $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ abg.)

Bem: ~~Setzt~~ man „beliebig" statt „endlich" in den Lemmas, so sind die entstehenden Aussagen falsch, d.h. z.B. es gibt unendliche Schnitte offener Mengen, die nicht mehr offen sind. Z.B. ist für $x \in \mathbb{R}$ der Schnitt $\bigcap_{\varepsilon>0} K_\varepsilon(x) = \{x\}$ nicht offen. Ebenso gibt es unendl. Vereinigungen ab. Mengen, die nicht abg. sind, z.B. ist für $x \in \mathbb{R}$ die Menge $A_\varepsilon(x) = \mathbb{R} - U_\varepsilon(x)$ abg., und $\bigcup_{\varepsilon>0} \mathbb{R} - U_\varepsilon(x) = \mathbb{R} \setminus \{x\}$ ist nicht abgeschlossen.

Bew. L. 1: (a) Sei $x \in \bigcup_{i\in I} U_i$. Dann ex. $i \in I$ mit $x \in U_i$. Da U_i offen, ex. $K_\varepsilon(x) \subset U_i$, also $K_\varepsilon(x) \subset \bigcup_{i\in I} U_i \Rightarrow \bigcup_{i\in I} U_i$ offen.

(b) Sei $x \in \bigcap_{i=1}^{n} U_i$ und $K_{\varepsilon_i}(x) \subset U_i$ offene Kugel. Dann ist mit $\varepsilon(x) := \min_{i=1,\ldots,n} \varepsilon_i$ die off. Kugel $K_{\varepsilon(x)}(x) \subset U_i$ f.a. $i=1,\ldots,n$.
$\Rightarrow K_{\varepsilon(x)}(x) \subset \bigcap_{i=1}^{n} U_i$. ∎

Beweis L. 2: (a) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $\bigcap_{i\in I} A_i$ mit Grenzwert $x\in X$.

Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in A_i (f.a. $i\in I$), und A_i abg., ist $x\in A_i$ f.a. $i\in I$

$\Rightarrow\ x\in\bigcap_{i\in I} A_i$.

(b) Es ist $U_i = X\setminus A_i$ offen und $\bigcap_{i=1}^n U_i$ offen, also $X\setminus\bigcap_{i=1}^n U_i$ abg. Da $X\setminus\bigcap_{i=1}^n U_i = \bigcup_{i=1}^n A_i$, folgt Beh. ■

Def.: Eine Teilmenge $K\subset X$ heißt (folgen-)kompakt, wenn jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in K eine in K konvergente Teilfolge besitzt.

Satz 4: Sei $(X,d)\subset\mathbb{R}^n$ ein vollständiger metr. Raum. Dann gilt für $A\subset X$:

A ist kompakt. $\Leftrightarrow$ A ist abgeschlossen und beschränkt.

[Bsp: $\mathbb{R}^n$ selbst] Dazu:

Lemma 3: (S. 1.21) Jede abg. Teilmenge A eines vollst. metr. Raumes (X,d) versehen mit der auf A eingeschränkten Metrik – selbst ein vollständiger metr. Raum.

Bew: Dass $(A, d|_A)$ metr. Raum ist klar.
Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bel. CF. in A $\xRightarrow{X \text{ vollst.}}$ (X) Gw. $x = \lim_{n\in\mathbb{N}} x_n = x\in X$ existiert.
Da A abg., gilt $x\in A$. D.h. A ist vollst.

Bew. Satz: "$\Longrightarrow$" Sei A kompakt.
Ang., A nicht beschränkt. $\Rightarrow$ ex. $y\in A$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A mit $d(y,x_n)\geq n$ f.a. $n\in\mathbb{N}$. Erst recht gilt $d(y,\tilde{x}_n)\geq n$ für jede Teilfolge $(\tilde{x}_n)_n$ von $(x_n)_n$. Dann kann aber erst recht keine dieser Teilfolgen $(\tilde{x}_n)$ konv. in A! ↯ A kompakt.
Sei $(x_n)_n$ Folge in A mit Grenzwert $x\in X$. Dann ist x auch Grenzwert jeder Teilfolge $(\tilde{x}_n)_n$
$\Longrightarrow\ x\in A$. Also ist A abg.

"$\Longleftarrow$" Sei A abg. und beschr. $\longrightarrow$ hier steckt $\mathbb{R}^n$ drin! beschr.

Bolzano-Weierstraß sagt: Jede Folge $(x_n)_n$ in A besitzt eine Teilfolge $(\tilde{x}_n)_n$, die Cauchyfolge ist. Da X vollst., konvergiert $(\tilde{x}_n)_n$ in X:

$\lim_{n\to\infty} \tilde{x}_n = x \in X$ ex. Da A abg., ist $x \in A$.

Somit haben wir konv. Teilfolge einer bel. Folge in A gefunden $\Rightarrow$ A kompakt. ∎

Stetige Funktion

<u>Satz:</u> Sei $f: (X, d_X) \longrightarrow (Y, d_Y)$ stetige Abb. zw. metr. Räumen (X, d_X) und (Y, d_Y).

(a) Sei "$U \subset Y$" offen $\Rightarrow$ $f^{-1}(U) \subset X$ offen.

(b) $A \subset Y$ abg. $\Rightarrow$ $f^{-1}(A) \subset X$ abg.

(c) Sind (X, d_X) und (Y, d_Y) vollständig, so gilt:

$K \subset X$ kompakt $\Rightarrow$ $f(K) \subset Y$ kompakt.

<u>Bew:</u> (a) Sei $U \subset Y$ offen und $x \in f^{-1}(U)$ bel.

Sei $\tilde{\varepsilon} > 0$ so, dass $K_{\tilde{\varepsilon},Y}(f(x)) \subset U \subset Y$.

f stetig in x bed., dass f. <u>alle</u> $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ ex. so, dass auch $d_X(x, \tilde{x}) < \delta$ folgt $d_Y(f(x), f(\tilde{x})) < \varepsilon$.

Insbes. heißt das: Es ex. $\tilde{\delta} > 0$ so, dass aus $d_X(x, \tilde{x}) < \tilde{\delta}$ folgt $d_Y(f(x), f(\tilde{x})) < \tilde{\varepsilon}$, d.h. für alle $\tilde{x} \in K_{\tilde{\delta},X}(x) \subset X$ gilt

$f(\tilde{x}) \in K_{\tilde{\varepsilon},Y}(f(x))$, also $K_{\tilde{\delta},X}(x) \subset f^{-1}(\underbrace{K_{\tilde{\varepsilon},Y}(f(x))}_{\subset U}) \subset f^{-1}(U)$.

(b) + (c) sparen wir uns.

<u>Satz 2':</u> $f: X \to Y$ Abb. zw. ~~stetig~~ metr. Räumen ist stetig $\Leftrightarrow$ ($U \subset Y$ offen $\Rightarrow$ $f^{-1}(U) \subset X$ offen).

<u>Bew:</u> "$\Leftarrow$" Die Kugeln $K_{\varepsilon,Y}(f(x)) \subset Y$ sind offen für alle $\varepsilon > 0$. $\Rightarrow$ $f^{-1}(K_{\varepsilon,Y}(f(x)))$ ist offen

$\Rightarrow$ ex. $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$: $K_{\delta,X}(x) \subset f^{-1}(K_{\varepsilon,Y}(f(x)))$.

In Metrik-Sprache ausgedrückt: zu $\varepsilon > 0$ ex. $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$ so, dass aus $d_X(x, x') < \delta$ folgt $d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$.