Plenarübung 24. Mai 2016

„Vektorfelder"

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Einen Diff.operator $X = \sum_{j=1}^{n} a_j(x) \underbrace{\partial_{x_j}}_{\partial_j}$ erster Ordnung mit Koeffizienten $a_j \in C^\infty(U)$ heißt Vektorfeld.

$$X : C^\infty(U) \longrightarrow C^\infty(U)$$
$$f \longmapsto \sum_{j=1}^{n} a_j \partial_j f$$

Mit folgenden Eigenschaften:

- X ist $\mathbb{R}$-linear: für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $f, g \in C^\infty(U)$ gilt
$$X(\lambda f + \mu g) = \lambda X(f) + \mu X(g)$$
- Für $f, g \in C^\infty(U)$ gilt
$$X(f \cdot g) = \sum_{j=1}^{n} a_j \partial_j (f \cdot g) \underset{\text{Prod.regel}}{=} \sum a_j \partial_j(f) \cdot g + \sum a_j f \cdot \partial_j(g)$$
$$= X(f) \cdot g + f \cdot X(g),$$
d.h. X ist eine Derivation
- Sei $[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X$ der Kommutator zweier Operatoren auf $C^\infty(U)$.
Sind X, Y Vektorfelder, so ist auch $[X, Y]$ ein Vektorfeld.

Bew: Seien $X = \sum_{j=1}^{n} a_j \partial_j$, $Y = \sum_{j=1}^{n} b_j \partial_j$, $a_j, b_j \in C^\infty(U)$

Dann gilt

$$[X,Y] = X\circ Y - Y\circ X$$
$$= \sum_{j=1}^{n} a_j\partial_j\Big(\sum_{k=1}^{n} b_k\partial_k\Big) - \sum_{j=1}^{n} b_j\partial_j\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\partial_k\Big)$$
$$= \sum_{k,j=1}^{n} a_j\big(\partial_j(b_k)\partial_k + b_k\partial_j\partial_k\big) - \sum_{j,k=1}^{n} b_j\big(\partial_j(a_k)\partial_k + a_k\partial_j\partial_k\big)$$
$$= \sum_{k,j=1}^{n}\big(a_j\partial_j(b_k) - b_j\partial_j(a_k)\big)\partial_k + \underbrace{\sum_{k,j=1}^{n}(a_jb_k - b_ja_k)\partial_j\partial_k}$$

für $j=k$ ist Summand $=0$
für $j\neq k$ ergänzen sich je zwei Summanden zu 0:

$$\sum_{k\neq j} a_jb_k\partial_j\partial_k - \sum_{k\neq j} b_ja_k\partial_j\partial_k$$
$$= \sum_{k\neq j} a_jb_k\partial_j\partial_k - \sum_{j\neq k} b_k a_j\underbrace{\partial_k\partial_j} = 0$$

$\blacksquare$

Die Fkt $c_k := \sum_{j=1}^{n}\big(a_j\partial_j(b_k) - b_j\partial_j(a_k)\big)$
ist wieder C^∞, also:

$$[X,Y] = \sum_{k=1}^{n} c_k\partial_k \quad \text{ist Vektorfeld}$$

<u>Nutzen:</u> Ein Vektorfeld X definiert einen <u>Kontraktionsoperator</u> auf Diffformen

$$i_X : A^k(U) \longrightarrow A^{k-1}(U) \qquad X = \sum a_j\partial_j$$
$$\omega \longmapsto \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot \partial_j \vee \omega,$$

wobei $\partial_j \vee \omega$ das "Herausschlagen von dx_j aus ω meint:

$$\partial_j \vee dx_I = \begin{cases} dx_{I\setminus\{j\}}\cdot\varepsilon & \text{falls } j\in I \\ 0 & \text{falls } j\notin I \end{cases},$$

wobei ε das eind. best. VZ so, dass $dx_j \wedge \varepsilon dx_{I\setminus\{j\}} = dx_I$

<u>Bsp:</u> $\partial_1 \vee (dx_1\wedge dx_2) = dx_2$, denn $dx_1 \wedge (dx_2) = dx_1\wedge dx_2$
$\partial_2 \vee (dx_1\wedge dx_2) = -dx_1$, denn $dx_2 \wedge (-dx_1) = (-1)^2\, dx_1\wedge dx_2$.

Bsp: $f \in C^\infty(U) = A^0(U) \Rightarrow df = \sum \partial_j f \cdot dx_j \in A^1(U)$

$$i_X(df) = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \, \partial_\nu \vee \Big(\sum_{j=1}^{n} \partial_j f \cdot dx_j\Big) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \sum_{j=1}^{n} \partial_j f \, \underbrace{\partial_\nu \vee dx_j}_{\delta_{\nu j}}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \partial_\nu f = X(f)$$

$$\boxed{i_X(df) = X(f) \quad \text{für } f \in A^0(U)}$$

Anschauung: Ein Vektorfeld $X = \sum a_j(x) \cdot \partial_j$

kann man sich so vorstellen:

Jedem Pkt $\xi \in U$ wird ein Vektor $a(\xi) = (a_1(\xi), \dots, a_n(\xi))$

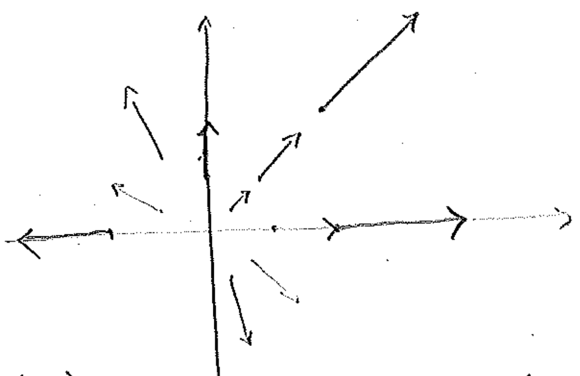
angehängt, sog. „Tangentialvektor".

Bsp: $X = \sum_{j=1}^{n} 1 \cdot \partial_j \Rightarrow a(\xi) = (1, \dots, 1)$ (ein konstantes Vektorfeld).

Bsp: $X = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{x_j}_{a_j(x)} \partial_j$ (Eulerfeld, radial)

$a(\xi) = (\xi_1, \dots, \xi_n)$

Für $n=2$:



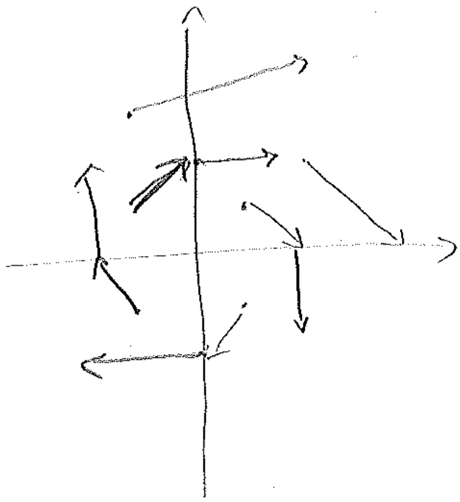
$$i_X(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) = \sum x_i \, \partial_i \vee (dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) = \sum x_i (-1)^{i-1} dx_{\{1,\dots,n\}\setminus\{i\}}$$

(4)

<u>Bsp:</u> Drehfelder : $\quad L_{ij} = x_i \partial_j - x_j \partial_i \qquad a(\xi_1, \dots, \xi_n) = (0, \dots, x_i, 0 \dots 0 \, -x_j, 0, \dots 0)$

$n=2: \quad L_{21} = x_2 \partial_{x_1} - x_1 \partial_{x_2} \quad : \quad a(\xi_1, \xi_2) = (\xi_2, -\xi_1)$

$$\begin{pmatrix} \xi_2 \\ -\xi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$



ⓐ

Lebesgue-Integral

X: Menge, $\mathcal{B} = \mathcal{B}(X)$ Fktenverband, $I : \mathcal{B}(X) \to \mathbb{R}$ abstr. Integral

$\downarrow$

- $\mathbb{R}$-wertige Fkt.
- $\mathbb{R}$-VR
- min/max gehören zu $\mathcal{B}(X)$

Halbverband:
- min/max abg.,
- "+" und "$\cdot\lambda$", $\lambda \geq 0$ abg.
- mit Werten in $\mathbb{R}^+$ / $\mathbb{R}^-$

Monotone Hülle $\mathcal{B}^+(X)$ eines Halbverbands $\mathcal{B}(X)$ mit Werten in $\mathbb{R}^+$:
Fkt: $X \to \mathbb{R}^+$, die sich pktw. mon. aufst. in $\mathcal{B}(X)$ approx. ($f_n \nearrow f$)

— " — $\mathcal{B}^-(X)$ — " — $\mathbb{R}^-$
Fkt: $X \to \mathbb{R}^-$, — " — abst. in $\mathcal{B}(X)$ approx.

Ist $\mathcal{B}(X)$ (Halb-)Verband mit Werten in $\mathbb{R}$,
dann ex. $\mathcal{B}^+(X)$ sowie $\mathcal{B}^-(X)$

Abstr. Integral: $I : \underset{(\text{Werte in } \mathbb{R}^+)}{\mathcal{B}(X)} \to \mathbb{R}^+$
(z.B. $Y = \{x\}$, $\mathcal{B}(Y) = \mathbb{R}^+$)

mit
1) Semilin: $I(f+g) = I(f) + I(g)$, $I(\lambda f) = \lambda I(f)$ für $\lambda \geq 0$
2) Monoton: $f \leq g \Rightarrow I(f) \leq I(g)$
3) $I(f_n) \nearrow I(f)$ für $f_n \nearrow f$, $f_n, f \in \mathcal{B}(X)$

Bsp: Eukl. Standardint. auf $C_c(\mathbb{R}^n)$; abstr. Int auf Verband sogar $\mathbb{R}$-lin!
Ein abstr. Integral I auf $\mathcal{B}(X)$ setzt sich eind. fort zu abstr. Int. I^+ auf $\mathcal{B}^+(X)$ (I^- auf $\mathcal{B}^-(X)$)
durch $I^+(f) = \sup_n I(f_n)$ für jede Folge $f_n \nearrow f$

Sei $I : \mathcal{B} = \overset{\text{Verband}}{\mathcal{B}(X)} \to \mathbb{R}$, $I^+ : \mathcal{B}^+ \to \mathbb{R}^+$, $I^- : \mathcal{B}^- \to \mathbb{R}^-$

Da $\mathcal{B}^+ = -\mathcal{B}^-$, $\mathcal{B}^- = -\mathcal{B}^+$ gilt für $h \in \mathcal{B}^-$:

$$\boxed{I^-(h) = -I^+(-h)}$$

Bew: $I^-(h) = \liminf I(h_n)$ für $h_n \searrow h$ in $\mathcal{B}$ bel.
$I^+(-h) = \limsup I(-h_n) = -\liminf I(h_n) = -I^-(h)$

Lebesgue-integrierbar bzgl. $(\mathcal{B}, I)$:

Sei $f : X \to \hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ bel. Fkt

und seien zu jedem $\varepsilon > 0$ Fkt $h \in \mathcal{B}^-$ und $g \in \mathcal{B}^+$ geg

mit (i) $h \le f \le g$

(ii) $\boxed{0 \le I^+(g) - I^-(h) < \varepsilon.}$

Dann heißt f L-int.bar.

$$\boxed{\begin{aligned} I^b(f) &:= \sup\{ I^-(h) \mid h \in \mathcal{B}^-,\ h \le f\} \\ I^\#(f) &:= \inf\{ I^+(g) \mid g \in \mathcal{B}^+,\ f \le g\}. \end{aligned}}$$

(bzw. $=-\infty$, falls leer)

(bzw $=+\infty$ falls leer)

Es gilt: $\boxed{I^b(f) \le I^\#(f),}$

denn: $I^-(h) \le I^+(g)\ (*)$ für $h \le g$, $h \in \mathcal{B}^-$, $g \in \mathcal{B}^+$

$\overset{\sup}{\Longrightarrow}$ $I^b(f) \le I^+(g)$ f.a. $g \in \mathcal{B}^+$.

$\overset{\inf}{\Longrightarrow}$ $I^b(f) \le I^\#(f)$

$(*)$: Dazu $g + (-h) \in \mathcal{B}^+$ und $g + (-h) \ge 0 \Rightarrow I^+(g + (-h)) \ge 0$

$\Rightarrow I^+(g) \ge -I^+(-h) = I^-(h)$.

Satz: $f : X \to \hat{\mathbb{R}}$ bzgl. $(\mathcal{B}, I)$ L-intbar $\Leftrightarrow$

$I^b(f) = I^\#(f) \in \mathbb{R}$.

Dann $I(f) := I^b(f) = I^\#(f)$ Lebesgue-Integral von f (bzgl $(\mathcal{B}, I)$).

Bew: "$\Leftarrow$" ist klar.

"$\Rightarrow$": $0 \le I^\#(f) - I^b(f) \le I^+(g) - I^-(h) \underset{(ii)}{<} \varepsilon$ f.a. $\varepsilon > 0$

$\Rightarrow I^\#(f) = I^b(f)$ $\in \mathbb{R}$

Insbes. $I^b(f) \le I^+(g) < \infty$

$I^\#(f) \ge I^-(h) > -\infty$

kommt Sie wohl am Mittwoch

©

Lemma: $f \in \mathcal{B}^+$ L-int.bar $\Leftrightarrow$ $I^+(f) \neq \infty$

($f \in \mathcal{B}^-$ L-intbar $\Leftrightarrow$ $I^-(f) \neq -\infty$).

In diesem Fall ist $I^b(f) = I^\#(f) = I^+(f)$
$(= I^-(f))$.

Insbes: $f \in \mathcal{B}$ ist L-intbar, und Lebesgue-~~Fktl~~. = Int $= I(f)$.

Bew: Für $f, g \in \mathcal{B}^+$ mit $f \leq g$ folgt $I^+(f) \leq I^+(g)$

$\Rightarrow I^\#(f) = I^+(f) < \infty$.

Da immer gilt: $I^b(f) \leq I^\#(f)$, muss man noch zeigen:

$I^+(f) \leq I^b(f)$.

Sei $h_n \in \mathcal{B}$ mit $h_n \nearrow f$ bel. $\Rightarrow$ $I(h_n) \nearrow I^+(f)$.

Da $I^-(h_n) = I(h_n)$, folgt

$$I^\#(f) = I^+(f) = \sup_n I(h_n) = \sup_n I^-(h_n) \leq \sup_{\substack{h \in \mathcal{B}^-,\\ h \leq f}} I^-(h) = I^b(f)$$

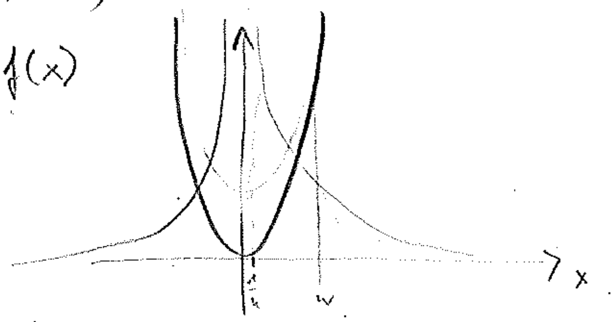
Satz: Die $\mathbb{R}$-Wertigen bzgl $(\mathcal{B}, I)$ L-int.baren Fkten $f: X \to \mathbb{R}$ bilden einen Verband $L(X) \supseteq \mathcal{B}(X)$.

Später: Das Lebesgue-Integral auf $L(X)$ ist ein abstraktes Integral.

Bsp 6.6: Reelles Standardintegral: (1)

$\boxed{f(x) = |x|^\alpha}$ ist nicht L-int.bar (für $\alpha \in \mathbb{R}$ bel.)
(setze $f(0) := 0$)

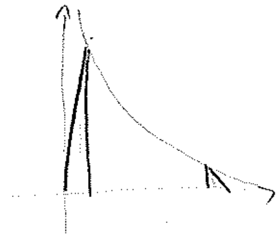
Denn $h_n(x) = \chi_{[\frac{1}{n}, n]}(x) \cdot f(x)$



erfüllt $h_n \le f$

$h_n \in B^-$

und $I^-(h_n) = \int_{\frac{1}{n}}^{n} x^\alpha \, dx \underset{\alpha \neq -1}{=} \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \Big|_{\frac{1}{n}}^{n}$



$$= \frac{n^{\alpha+1} - \frac{1}{n^{\alpha+1}}}{\alpha+1}$$

$\longrightarrow \infty$ für $n \to \infty$

also $I^-(h_n) = \infty$ ↯

$\alpha = -1$: $I^-(h_n) = \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{dx}{x} = \log n - \log(\frac{1}{n}) = 2 \log n \longrightarrow \infty$ für $n = \infty$

Aber: Für $\alpha > -1$ int.bar auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{R}$.

(Das ist interessant für: $\boxed{-1 < \alpha < 0 \text{ und } I = [-b, b].)}$ $f: I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} |x|^\alpha & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Denn dann gilt für $\tilde{h}_n(x) = \chi_{[-b,b] \setminus (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})}(x) \, f(x)$:

- $h_n \in B(X) = CT(\mathbb{R})$ und
- $h_n \le f(x)$ $(0^\alpha := 0)$ $\quad x^\alpha = \exp(\alpha \ln x$
- $I^+(h_n) = \int_{-b}^{-\frac{1}{n}} |x|^\alpha \, dx + \int_{1/n}^{b} |x|^\alpha \, dx$

$$= 2 \cdot \int_{1/n}^{b} x^\alpha \, dx = 2 \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \Big|_{1/n}^{b} = \frac{2b^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \underbrace{\frac{2}{(\alpha+1) n^{\alpha+1}}}_{\longrightarrow 0}$$

für $n \to \infty$
Da $\alpha + 1 > 0$

$I^+(h_n) \to \frac{2b^{\alpha+1}}{\alpha+1}$