Plenarübung Analysis II, (1)

<u>Beh.:</u> Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \exp(x)$.

<u>Beweis:</u> Benütze Regel von l'Hospital (Ü-Aufg. 9):

Sei $n \geq 1$ und f, g n-mal diffbar auf $[a,b]$ $(a<b)$.

Verschwinden die i-ten Abl. von f und g in x $(x \in [a,b])$ für $0 \leq i < n$,

und gilt $g^{(n)}(x) \neq 0$, so ist

$$\lim_{y\to x} \frac{f(y)}{g(y)} = \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}.$$

Damit folgt zunächst für $x=0$:

$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$, denn für $\cdot$ $f(x)=\log(1+x)$ ist $f(0)=\log 1 = 0$, $f'(0) = \frac{1}{1+0} = 1$

$\cdot$ $g(x) = x$ ist $g(0)=0$ und $g'(0)=1$.

<u>Zur Behauptung:</u> Sei $N \gg 0$ so, dass $1+\frac{x}{N} > 0$. Dann gilt für alle $n \geq N$

$$0 < \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \exp\left(n \cdot \log\left(1+\frac{x}{n}\right)\right) \overset{\uparrow}{=} \exp\Big(\underbrace{x \cdot y^{-1}}_{n} \cdot \log(1+y)\Big)$$

Subst. $y = \frac{x}{n}$

$$= \exp\left(x \cdot \frac{\log(1+y)}{y}\right).$$

Es folgt: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \exp\left(x \cdot \frac{\log\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}}\right) = \exp\Big(x \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}}}_{=1}\Big) = \exp(x)$

Bsp. für einen Verband, der die Stone-Bedingung verletzt:

Ein Verband $B(X)$ erfüllt die Stone-Bed., falls mit $f \in B(X)$ auch $\min(f, \chi_X) \in B(X)$.

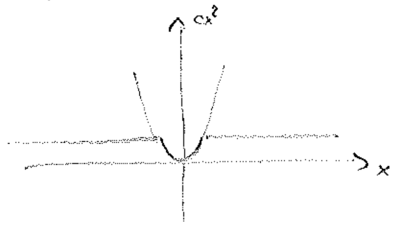
Jetzt das Gegenbsp:

$$B := \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = cx^2 \text{ für ein } c \in \mathbb{R} \}$$ (Monome 2-ten Grades)

B ist ein $\mathbb{R}$-VR und ein Verband, denn

$$\min(cx^2, dx^2) = \min(c,d)x^2 \text{ und } \max(cx^2, dx^2) = \max(c,d)x^2.$$

Aber für $c > 0$ ist $\min(cx^2, \chi_{\mathbb{R}}) \neq c' \cdot x^2$ f.a. $c' \in \mathbb{R}$.
kein Monom 2-ten Grades.



Bem: Das funktioniert für Monome n-ten Grades, $n > 0$, analog!
$(a \cdot |x|^n)$

Der Satz von Fubini in auswendig-lernbarer Version:

Die gesamte Lebesgue-Theorie findet sich in ausführlicherer Form (als im Hötta-Skript) in Weissauers Analysis-Skript (s. Homepage). Auch dort wird der Zugang übers Daniell-Integral benutzt, die Bezeichungen sind sehr ähnlich zur VL/Hötta-Skript.

Satz v. Fubini (S. 198): auf dem $\mathbb{R}^{m}$.

Sei $X = X_1 \times X_2$, wobei $X_1 = \mathbb{R}^n$, $X_2 = \mathbb{R}^m$.

Für jede Lebesgue-integrierbare Fkt $f(x_1, x_2) \in L(X)$ gilt dann:

Es gibt eine Nullmenge $N_1 \subset X_1$ so, dass für $x_1 \notin N_1$ die Fkt $f(x_1, -)$ für festgehaltenes x_1 L-int.bar auf X_2 ist, insbes. existiert das Integral $I_2(f)$. Es definiert eine L-intbare Fkt. $f_1(x_1)$ auf X_1, deren Integral $I_1(f_1)$ mit $I(f)$ übereinstimmt:

$$\boxed{I(f) = I_1(I_2(f))}.$$

(Natürlich gilt auch $I(f) = I_2(I_1(f))$.)

Zusatz zum Folgenraum:

$B(\mathbb{N})$ endl. (d.h. abbrechende) Folgen $\rightsquigarrow L(\mathbb{N})$.

Wissen: $f \in L(\mathbb{N}) \iff I(|f|) = \sum_{n=0}^{\infty} |f|(n) < \infty$.

Beh: Seien $f, g \in L(\mathbb{N})$. Dann ist $f \cdot g \in L(\mathbb{N})$.

Bew: Da $g \in L(\mathbb{N})$, ist $|g(n)|$ eine Nullfolge und g somit beschränkt. Sei $c = \max_n |g(n)|$.

Dann gilt für die abgeschnittenen Fkten g_n, f_n,
$f_n = \chi_{[0,n]} \cdot f$,

$$f_n \cdot g_n \longrightarrow f \cdot g \text{ punktweise}$$

und $|f_n \cdot g_n| \leq c \cdot |f|$, $c \cdot |f| \in L(\mathbb{N})$.
(Verbandseigenschaften)

$$\overset{\text{S.v.d.dom.Konv.}}{\Longrightarrow} \quad f \cdot g \in L(\mathbb{N}).$$

Beh: Es gilt $\underbrace{\ }_{|I(f\cdot g)| \leq}$ $I(|f \cdot g|) \leq I(|f|) \cdot I(|g|)$.

Bew: Es gilt $\lim_{n\to\infty} I(|f_n \cdot g_n|) = I(|f \cdot g|)$, $\lim_{n\to\infty} I(|f_n|) = I(|f|)$ ditto für g.

$$I(|f_n|) \cdot I(|g_n|) = \sum_{j=0}^{n} |f(j)| \cdot \underbrace{\sum_{j=0}^{n} |g(j)|}_{\geq |g(k)| \text{ für } k=0,\dots,n} \geq \sum_{j=0}^{n} |f(j)| \cdot |g(j)| = I(|f_n \cdot g_n|)$$

$$\Rightarrow \quad I(|f_n g_n|) = I(|f_n|) \cdot I(|g_n|).$$

Für $I(f) \cdot I(g)$ gibt es eine schöne Formel, die durch Umordnen der absolut konvergenten Reihen entsteht (Cauchy-Produkt):

$$\boxed{\sum_{j=0}^{\infty} f(j) \cdot \sum_{\ell=0}^{\infty} g(\ell) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} f(j) \cdot g(k-j) \right).}$$

Bew.: Für endl. Summen ergibt sich durch Umordnen

$$\sum_{j=0}^{n} f(j)\cdot \sum_{\ell=0}^{n} g(\ell) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} f(j)\, g(k-j) .$$

Da die beiden Partialsummen links auf absolut konvergente Reihen führen, konvergiert auch die rechte Seite absolut, und die Limiten von rechter und linker Seite stimmen überein.

Folgerung: Zu $f, g \in L(\mathbb{N})$ bilde die Fkt $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$,

$$h(k) = \sum_{j=0}^{k} f(j)\cdot g(k-j).$$

Dann ist h L-int.bar ($h \in L(\mathbb{N})$) mit $I(h) = I(f)\cdot I(g)$.

Beweis: $h_n = \chi_{[0,n]}\cdot h \in B(\mathbb{N})$ mit $|h_n| \nearrow |h|$ und

$$I(|h_n|) = I(|f_n|)\, I(|g_n|) \overset{B.L.}{\Longrightarrow} |h| \in L(\mathbb{N}) \text{ mit } I(|h|) = I(|f|)\, I(|g|).$$

Nun gilt auch $h_n \to h$ pktw. mit $|h_n| \le |h| \in L(\mathbb{N})$

$$\overset{\text{S.v.Lebesgue}}{\Longrightarrow} h \in L(\mathbb{N}) \text{ mit } I(h) = \lim_{n\to\infty} I(h_n) = \lim_{n\to\infty} \left(I(f_n)\cdot I(g_n)\right) = I(f)\cdot I(g).$$ ∎

Oder: h und $|h| : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ besitzen endl. Zählintegral, $I(h) = I(f)\cdot I(g)$, $I(|h|) = I(|f|)\cdot I(|g|)$ nach Konstr., also ist $h \in L(\mathbb{N})$.

$\boxed{f\cdot g \neq h}$

$\boxed{\text{aber } \sum f(n)\cdot \sum g(n) = \sum h(n)}$

Bsp: 2-dim geometrische Reihen: Seien $p, q \in \mathbb{R}$, $|p|, |q| < 1$.

Dann gilt $\sum_{j,k=0}^{\infty} (p^j \cdot q^k) = \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{h} p^\ell q^{h-\ell} = \frac{1}{1-p} \cdot \frac{1}{1-q}$

<u>Bew:</u> $\sum_{j,k=0}^{n} p^j \cdot q^k = \sum_{j=0}^{n} p^j \cdot \sum_{k=0}^{n} q^k$, beide Faktoren sind für $|p|, |q| < 1$ abs. konv.

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{j,k=0}^{n} p^j \cdot q^k = \sum_{j=0}^{\infty} p^j \cdot \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-p} \cdot \frac{1}{1-q}$$

Semi-**Bsp:** Binomialreihe: $B_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n$

$$B_n(x) \cdot B_m(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{\ell} \binom{n}{j} \cdot \binom{m}{\ell-j} \right)}_{\overset{!}{=} \binom{n+m}{\ell}} \cdot x^\ell \qquad x^\ell = x^j \cdot x^{\ell-j}$$

$\shortparallel$

$B_{n+m}(x)$

Koeffizientenvergl. der Polynome. (endl. Summe!)

im Wahrheit endl. Summen!

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} \binom{n+m}{\ell} x^\ell = B_{n+m}(x)$$

also:

für $n, m \in \mathbb{N}$ trivial

$$\boxed{\begin{aligned} &B_n(x) \cdot B_m(x) = B_{n+m}(x) \\ \Longrightarrow\ &\sum_{j=0}^{\ell} \binom{n}{j} \binom{m}{\ell-j} = \binom{n+m}{\ell} \end{aligned}}$$

Additionstheorem für Binomialkoeffizienten.