Plenarübung Ana II, 17.5.2016

(1)

Der Pullback von Diff.formen

Seien $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ offen,
Koord. $x_1, \dots, x_n$ im $\mathbb{R}^n$, $y_1, \dots, y_m$ im $\mathbb{R}^m$.

Sei $\varphi: U \to V$ eine C^∞-Fkt (reicht auch 1-mal stetig diffbar).

Wollen Abb. $\varphi^*: A^\circ(V) \to A^\circ(U)$,
sog. Pullback mit gewissen Eigenschaften.

Betrachte zunächst $f \in A^\circ(V) = C^\infty(V)$.

Durch (i) $\varphi^*(f) := f \circ \varphi \in C^\infty(U) = A^\circ(U)$

$$U \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

wird C^∞-Fkt auf U festgelegt (bzw. C^1-Fkt auf U).

Das ist eine natürliche Bildung!

Weitere Eigenschaften, die φ^* erfüllen soll:

(ii) $\mathbb{R}$-linear

(iii) $\wedge$-multiplikativ

(iv) vertauscht mit d, d.h. $d \circ \varphi^* = \varphi^* \circ d$.

Beh: Der Pullback φ^* ist durch (i) – (iv) bereits eindeutig festgelegt.

Bew: Um den Pullback von $\omega = \sum_{|I|=i} f_I \wedge dy_I \in A^i(V)$

zu definieren, reicht es wegen (ii) und (i)

zu definieren, was $\varphi^*(dy_I)$ ist:

$$\varphi^*(\omega) = \sum_{|I|=i} \varphi^*(\varphi_I) \wedge \varphi^*(dy_I).$$

Wegen (iii) ist für $I = \{j_1, \dots, j_i\}$, $j_k < j_{k+1}$, $k = 1, \dots, i-1$,

$$\varphi^*(dy_I) = \varphi^*(dy_{j_1} \wedge \dots \wedge dy_{j_i})$$

$$= \varphi^*(dy_{j_1}) \wedge \varphi^*(dy_{j_2}) \wedge \dots \wedge \varphi^*(dy_{j_i}).$$

Es reicht also, $\varphi^*(dy_j)$ zu kennen.

Wegen (iv) ist $\varphi^*(dy_j) = d\varphi^*(y_j)$.

Und das ist durch (i) festgelegt: $y_j \in A^0(V) = C^\infty(V)$,

$$V \ni y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \longmapsto y_j \quad \text{(Koord.transf.)}$$

Für $x \in U$:

$$\varphi^*(y_j)(x) = y_j(\varphi(x)) = \varphi_j(x), \quad \text{wo } \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_m \end{pmatrix},$$

und $\varphi^*(dy_j) = d\varphi^*(y_j) = d\varphi_j(x) = \sum_{k=1}^{n} \partial_{x_k}(\varphi_j(x))\, dx_k$.

$\blacksquare$

Beispiele:

1) $\underset{\text{Koord.: } x}{\varphi: \mathbb{R}} \longrightarrow \underset{y_1, y_2}{\mathbb{R}^2}, \quad x \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$

$$\varphi^*(y_1) = y_1(\varphi(x)) = \varphi_1(x) = x$$
$$\varphi^*(y_2) = \varphi_2(x) = x$$
$$\varphi^*(dy_1) = dx = \varphi^*(dy_2)$$
$$\varphi^*\big(\underset{y=(y_1,y_2)}{f(y)\,dy_1 + g(y)\,dy_2}\big) = f(x,x)\,dx + g(x,x)\,dx = \big(f(x,x) + g(x,x)\big)\,dx$$
$$\varphi^*\big(f(y_1,y_2)\,dy_1 \wedge dy_2\big) = f(x,x)\,dx \wedge dx = 0$$

[klar: $\varphi^*: A^2(\mathbb{R}^2) \longrightarrow A^2(\mathbb{R}) = 0$.]

2) $\underset{x}{\varphi: \mathbb{R}} \longrightarrow \underset{y_1 y_2}{\mathbb{R}^2}, \quad x \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\varphi^*(y_1) = \varphi_1(x) = x$$
$$\varphi^*(y_2) = \varphi_2(x) = 0$$
$$\varphi^*(dy_1) = dx, \quad \varphi^*(dy_2) = d0 = 0$$
$$\varphi^*\big(f(y_1,y_2)\,dy_1 + g(y_1,y_2)\,dy_2\big) = f(x,0)\,dx + g(x,0)\cdot 0 = f(x,0)\,dx$$

3) $\underset{x_1, x_2}{\varphi: \mathbb{R}^2} \longrightarrow \underset{y_1, y_2}{\mathbb{R}^2}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$

$f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$: $\quad \varphi^*(f)\,((x_1,x_2)) = f(\varphi(x_1,x_2)) = f(x_2, x_1)$

$$\varphi^*(y_1) = x_2, \quad \varphi^*(y_2) = x_1 \quad \Longrightarrow$$
$$\varphi^*(dy_1) = d\varphi^*(y_1) = dx_2, \quad \varphi^*(dy_2) = dx_1$$

$$\varphi^*: A^1(\mathbb{R}^2) \longrightarrow A^1(\mathbb{R}^2)$$
$$f(y_1,y_2)\,dy_1 + g(y_1,y_2)\,dy_2 \longmapsto f(x_2,x_1)\,dx_2 + g(x_2,x_1)\,dx_1$$

$$A^2(\mathbb{R}^2) \longrightarrow A^2(\mathbb{R}^2)$$
$$f(y_1,y_2)\,dy_1 \wedge dy_2 \longmapsto f(x_2,x_1)\,dx_2 \wedge dx_1 = -f(x_2,x_1)\,dx_1 \wedge dx_2$$

4) $\varphi : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad \varphi^*(f)(t) = f(\sin t)$ (4)

$t \longmapsto \sin t$ $\qquad \varphi^*(dx) = d\varphi^*(x) = d\sin t = \cos t > 0$

Orientierter Koordinatenwechsel ($\operatorname{sign} \cancel{\det} D\varphi > 0$)

$$\Rightarrow \int_{t=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi^*(\omega) = \int_{-1}^{1} \omega \qquad \text{(Substitutionsformel)}$$

Bsp.: $\omega = x^2 dx \Rightarrow \varphi^*(x^2 dx) = \sin^2 t \cdot \cos t \cdot dt$

$$\Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \sin^2 t \cos t \, dt = \int_{-1}^{1} x^2 \, dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{3}(1 - (-1)) = \frac{2}{3}$$

Substitutionsregel:

Sei $\varphi : U \longrightarrow V$ Koordinatenwechsel

(d.h. U, $V \subset \mathbb{R}^n$, φ: bij. und stetig part. differenzierbar

mit $\det D\varphi(x) \neq 0$ f.a. $x \in U$

D.h. φ ist in jedem Pkt lokal umkehrbar)

Dann: $f : V \to \mathbb{R}$, $f \in C_c(V) \Rightarrow f(\varphi(x)) \cdot |\det D\varphi(x)| \in C_c(U)$

und:

$$\int_V f(y) \, dy = \int_U f(\varphi(x)) \cdot |\det D\varphi(x)| \, dx$$

Beispiele für die Substitutionsregel:

1) Translationsinvarianz des Integrals:

$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^n \text{ fest.}$$
$$x \longmapsto x+t$$

$D_\xi \varphi(x) = x$, d.h. $D\varphi = id_{\mathbb{R}^n}$.

Sei $f \in C_c(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f(\varphi(x)) \cdot |\det D\varphi(x)| = f(x+t) \cdot |\det id_{\mathbb{R}^n}|$
$= f(x+t) \in C_c(\mathbb{R}^n)$

und $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x+t)\,dx$

2) $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear mit Matrix M bzgl. Standardbasis
$x \longmapsto Mx \Rightarrow D_\xi \varphi(x) = Mx$

Sei $f \in C_c(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow f(\varphi(x)) \cdot |\det D\varphi(x)| = f(Mx) \cdot |\det M| \in C_c(\mathbb{R}^n)$

und $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(Mx) \cdot |\det M|\,dx$

Insbes.: - $M = c \cdot \mathbb{1}_n$, $c \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \Rightarrow$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(cx)\,|c|^n\,dx \quad \text{bzw: } \int_{\mathbb{R}^n} f(cx)\,dx = \frac{1}{|c|^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx$$

- $M \mathrel{\hat=}$ Drehung $\Rightarrow \det M = 1$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(Mx)\,dx$$