Plenarübung 14.6.2016 Ana II

Rotationssymmetrische Fkten

- Kugelschale $K_{a,b}^{(n)} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a < \|x\|_2 < b\}$ für $0 \le a < b \le \infty$.

  Bsp: Einheitskugel (euklid.) $K_1^{(n)} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 \le 1\}$. Dann ist $K_1^{(n)} = \overline{K_{0,1}^{(n)}}$. Sei $\kappa_n = \mathrm{vol}(K_1^{(n)}) = \mathrm{vol}(K_{0,1})$,

  da $\{0\}$ und die 1-Sphäre Nullmengen.

- Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ (oder $[a,b)$) geg. Dann wird durch $\tilde{f}: K_{a,b} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto \tilde{f}(x) = f(\|x\|_2)$ eine <u>rotationssymmetrische</u> Fkt auf $K_{a,b}$ definiert.

  (Für alle Drehungen M gilt $\|Mx\|_2 = \|x\|_2$.)

- <u>Beh.</u>: $\tilde{f}$ ist L-integrierbar auf $K_{a,b}$ $\Leftrightarrow$ $f(r) \cdot r^{n-1}$ L-integrierbar auf $[a,b)$:

  Dann gilt: $\int_{K_{a,b}} \tilde{f}(x)\,dx = n\kappa_n \int_a^b f(r)\,r^{n-1}\,dr$

Beweis in drei Schritten:

(i) $\mathrm{vol}(K_{a,b}) = \cancel{\kappa_n(b^n - a^n)} = n \cdot \kappa_n \cdot \int_a^b r^{n-1}\,dr$

(ii) Aussage für $f \in C^1(\mathbb{R}_{\ge 0})$ (oder C_c; $\mathbb{R}_{\ge 0} = B$)! $f(r)r^{n-1}$ intbar auf $[a,b)$ $\Leftrightarrow$ $\tilde{f}$ intbar auf $K_{a,b}$ $n\kappa_n \int_a^b f(r)\,r^{n-1}\,dr = \int_{K_{a,b}} \tilde{f}(x)\,dx$

(iii) Aussage für Lebesgue-int.bare Fkten

Zu (i): $\operatorname{vol}(K_{a,b}^{(n)}) \overset{\uparrow}{=} \kappa_n (b^n - a^n) \underset{\text{Hauptsatz.}}{\overset{\uparrow}{=}} n \cdot \kappa_n \int_a^b r^{n-1}\,dr$ (2)

$\operatorname{vol}(K_R^{(n)}) = \kappa_n \cdot R^n$, denn:

$$\operatorname{vol}(K_R^{(n)}) = \int \chi_{K_R}(x)\,dx = \int \chi_{K_1}\left(\frac{x}{R}\right)dx \underset{\substack{\text{Subst.regel:}\\ \varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ x \longmapsto R\cdot x}}{=} \int \chi_{K_1}(x) \cdot |\det D\varphi(x)|\,dx$$

$$= R^n \cdot \int \chi_{K_1}(x)\,dx = R^n \cdot \kappa_n$$

Zu (ii): (i) besagt auch: $\chi_{[a,b]}(r) \cdot r^{n-1}$ intbar auf $\mathbb{R}$ $\iff$ $\chi_{K_{a,b}}$ intbar auf $\mathbb{R}^n$,
für $0 \leq a < b < \infty$

und Integrale wie gewünscht.

Also gilt diese Aussage auch für alle Treppenfkten f auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$, und überträgt sich nach Def. des Integrals sofort auf Fkten f aus CT.

~~Zu (iii): Die Aussage überträgt sich zunächst auf Fkten der mon. Hüllen B^+, B^-.~~
~~Da ... $= \inf\{I^+(g) \mid g \geq f, g \in B^+\}$ $= \sup\{I^-(h) \mid h \leq f, h \in B^-\}$,~~
~~kann man Folge $f_n \in B^-$ wählen mit $f_n \nearrow f r^{n-1}$~~

Zu (iii): Die Aussage überträgt sich zunächst auf Fkten der mon. Hüllen:

Sei $f(r)\, r^{n-1} \in \mathcal{B}^+_{fin}(\mathbb{R}_{\geq 0})$, $\quad g_m \nearrow f(r)\, r^{n-1}$, $g_m \in C\mathcal{T}(\mathbb{R}_{\geq 0})$

$$\Rightarrow \tilde{g}_m \overset{\frac{g_m(\|x\|)}{\|x\|^{n-1}}}{=} \nearrow \tilde{f}, \quad \tilde{g}_m \in C\mathcal{T}(\mathbb{R}^n) \quad \Rightarrow \quad \tilde{f} \in \mathcal{B}^+(\mathbb{R}^n)$$

mit $\int \tilde{f} = \lim_{m\to\infty} \int \tilde{g}_m = n \cdot \kappa_n \cdot \lim_{m\to\infty} \int g_m = n\kappa_n \int f(r)\, r^{n-1}\, dr.$

Sei $\tilde{f} \in \mathcal{B}^+_{fin}(\mathbb{R}^n)$, rot. symm., $\tilde{g}_m \nearrow \tilde{f}$, $\tilde{g}_m \in C\mathcal{T}(\mathbb{R}^n)$:

$$\Rightarrow \quad g_m(r) := \tilde{f}(r \cdot x)\, r^{n-1} \quad (x \neq 0 \text{ bel.}) \quad \in C\mathcal{T}(\mathbb{R}_{\geq 0})$$

und $\int$-Identität ebenso.

(Ditto für $\mathcal{B}^-$.)

Also gilt: $f(r)\, r^{n-1} \in \mathcal{B}^{\pm}(\mathbb{R}_{\geq 0}) \iff \tilde{f} \in \mathcal{B}^{\pm}(\mathbb{R}^n)$.

Da jede L-intbar. Fkt monoton durch $\mathcal{B}^{\pm}$-Fkten angenähert werden kann, folgt (B.L. oder Def. d. L-Int.barkeit) die Beh.

1. Anwendung: $\kappa_n = \mathrm{vol}(K_1^{(n)}) = \dfrac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(1+\frac{n}{2})}$ Γ: Gammafkt (= H auf letztem Blatt)

Beweis: $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$ (letztes Ü-Blatt).

Es folgt (mit Fubini): $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|_2^2}\,dx = \sqrt{\pi}^{\,n} = \pi^{\frac{n}{2}}$.

Andererseits ist $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|_2^2}\,dx \overset{\text{rot. symm. Fkt}}{=} n\cdot\kappa_n \cdot \int_0^\infty e^{-r^2} r^{n-1}\,dr$

$\varphi(t) = t^2$, $d\varphi(t) = 2t\,dt$

$\int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{n}{2}-1}\,dt = \int \varphi^*\left(e^{-t} t^{\frac{n-2}{2}}\,dt\right) = \int_0^\infty e^{-r^2}(r^2)^{\frac{n-2}{2}}\, 2r\,dr = 2\int_0^\infty e^{-r^2} r^{n-1}\,dr$

$$= n\cdot\kappa_n \, \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{n}{2}-1}\,dt$$

$$\overset{\text{letztes Ü-Blatt}}{=} \kappa_n \cdot \frac{n}{2}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$$

$$\overset{\text{ditto}}{=} \kappa_n\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)$$

also: $\kappa_n = \dfrac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$,

wobei $\Gamma(m+1) = m!$

$\Gamma\left(\frac{1}{2}+m+1\right) = \left(\frac{1}{2}+m\right)\left(\frac{1}{2}+m-1\right)\cdots\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$,

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ (kommt man noch).

nachschauen

2. Anwendung: $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{1}{\|x\|^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

(i) $x \mapsto \|x\|^{-\alpha}$ ist int.bar über Kugel $K_R(0) \subset \mathbb{R}^n$

$$\Leftrightarrow r \longmapsto r^{n-1-\alpha} \underset{\text{ist intbar}}{\wedge} \text{über } (0,R)$$

und $\overset{\text{Ü-Bl.}}{\Longleftrightarrow} + (n-1-\alpha) > -1 \Leftrightarrow \alpha < n.$

Und dann gilt:

$$\int_{K_R(0)} \frac{1}{\|x\|^\alpha}\, dx = n\kappa_n \int_0^R r^{n-1-\alpha}\, dr = \frac{n}{n-\alpha} \cdot \kappa_n \cdot R^{n-\alpha}.$$

(ii) $x \longmapsto \|x\|^{-\alpha}$ ist intbar über $\mathbb{R}^n \setminus K_R(0)$

$$\Leftrightarrow r \mapsto r^{n-1-\alpha} \text{ ist intbar über } [R,\infty)$$

$$\overset{\text{Ü.Bl.}}{\Leftrightarrow} n-1-\alpha < -1 \Leftrightarrow \alpha > n.$$

Und dann gilt:

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}^n \setminus K_R(0)} \frac{1}{\|x\|^\alpha}\, dx}_{\lim\limits_{N\to\infty} \int_{\underbrace{K_N(0)\setminus K_R(0)}_{K_{R,N}}} \frac{1}{\|x\|^\alpha}} = n\kappa_n \underbrace{\int_R^\infty r^{n-1-\alpha}\, dr}_{\lim\limits_{N\to\infty} \int_R^N r^{n-1-\alpha}\, dr} = \frac{n}{\alpha - n}\, \kappa_n \cdot R^{n-\alpha}$$

(iii) Folgerung: Ist $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $\mu : K \to \mathbb{R}$ beschränkt, L-intbar, dann existiert das Integral

$$\int_K \frac{\mu(x)}{\|x-a\|^\alpha}\, dx$$

für jeden Exponenten $\alpha < n$ und jeden Pkt $a \in \mathbb{R}^n$.