Plenarübung Analysis II

12. 7. 16

Bsp für L^2 :

$f_\alpha(x) = \frac{1}{x^\alpha} \cdot \chi_{[1,\infty)}(x) \in L(\mathbb{R})$ (bzw. $L^1(\mathbb{R})$ da meßbar)

$\Longleftrightarrow \alpha > 1$

Daher ist $\left\{ \begin{array}{l} f_{3/4}(x) = \frac{1}{x^{3/4}} \chi_{\dots} \notin L^1(\mathbb{R}) \text{, aber} \\ |f_{3/4}(x)|^2 = \frac{1}{x^{3/2}} \chi_{\dots} \in L(\mathbb{R}) \text{, also } f_{3/4} \in L^2(\mathbb{R}) \end{array} \right.$

Insbes. sind die Normen $\|f\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}} |f|$ und $\|f\|_{L^2} = \int_{\mathbb{R}} |f|^2$ nicht äquivalent!

oder $f_1(x) = \frac{1}{x} \cdot \chi_{[1,\infty)} \notin L(\mathbb{R})$, aber

$|f_1(x)|^2 = \frac{1}{x^2} \chi_{[1,\infty)} \in L(\mathbb{R}) \Rightarrow f_1 \in L^2(\mathbb{R})$

Sesquilinearformen

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ mit "$\overline{}$" $\hat{=}$ kompl. konj.

[~~$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}$ mit "$\overline{}$" kompl. Konj.~~]

V $\mathbb{K}$-VR, $\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ heißt

<u>sesquilinear</u>, falls sie <u>$\mathbb{R}$-linear</u> ist und falls gilt

$$\langle \lambda v, \mu w \rangle = \bar{\lambda} \cdot \mu \langle v, w \rangle \quad \text{f.a. } v, w \in V,\ \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

Sie heißt <u>hermitesch</u>, falls

$$\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle} \quad \text{f.a. } v, w \in V.$$

<u>Folg</u>: Eine herm. Sesqu. lin. form erfüllt $\langle v, v \rangle \in \mathbb{R}$ f.a. $v \in \mathbb{R}$.

[$\langle v, v \rangle = \overline{\langle v, v \rangle} \Rightarrow \mathrm{Im} \langle v, v \rangle = 0 \Rightarrow \langle v, v \rangle \in \mathbb{R}$.]

<u>Bsp</u>: Standardform $V = \mathbb{C}^n$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\langle v, w \rangle = \sum_{j=1}^{n} \bar{v}_j w_j$

ist sesqu. lin. u. hermitesch.

Eine herm. Sesqu. lin. form heißt <u>positiv definit</u>, wenn f.a. $v \in V$:

$\langle v, v \rangle \geq 0$ und $\langle v, v \rangle = 0$ nur für $v = 0$.

[wenn das nicht erfüllt ist: pos. sem. def.]

<u>Bsp</u>: Standardform auf $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ sind pos. def.

↳ eukl. Skalarprod.

<u>Def</u>: Ein <u>Skalarprod.</u> auf $\mathbb{K}$-VR V ist pos. def. herm. Sesqu. lin. form.

<u>Bem</u>: (i) Schränkt man eine (pos. def.) herm. Sesqu. form auf V ein auf einen $\mathbb{K}$-UVR $W \subset V$,

dann ist diese Einschränkung wieder (pos. def.) herm. Sesqu. form.

(ii) Pos. def. herm. Sequ.lin. Formen sind nicht ausgeartet.

[z.z.: zu $v \neq 0$ ex. $w \neq 0$ mit $\langle v,w\rangle \neq 0$. Das ist hier für $w = v$ erfüllt.]

(iii) Jede Sesquilin.form $\langle \cdot,\cdot \rangle$ auf $V = \mathbb{K}^n$ wird beschrieben durch eine $n \times n$-Matrix $H = (H_{ij})_{ij} \in M_{n,n}(\mathbb{K})$.

Dazu sei $e_1, \ldots, e_n$ Basis von V.

Setze $H_{ij} := \langle e_i, e_j \rangle$.

Dann ist für $v = \sum_i v_i e_i$, $w = \sum_j w_j e_j$, $v_i, w_j \in \mathbb{K}$:

$$\langle v, w \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n v_i e_i, \sum_{j=1}^n w_j e_j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^n \overline{v_i} w_j \langle e_i, e_j \rangle$$

$$= \sum_{i,j=1}^n \overline{v_i} H_{ij} w_j$$

$$= \overline{v}' H w. \quad \text{transponiert}$$

(iv) Die Sesquilin.form ist hermitesch $\iff$ $\boxed{H = \overline{H}'}$.

Bew: $H_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$, $\overline{\langle e_j, e_i \rangle} = \overline{H_{ji}}$.

Also: $\langle e_i, e_j \rangle = \overline{\langle e_j, e_i \rangle} \iff H_{ij} = \overline{H_{ji}} \iff H = \overline{H}'$

Ist $\langle v,w\rangle = \overline{\langle w,v\rangle}$, so ist insbes. $\langle e_i, e_j\rangle = \overline{\langle e_j, e_i\rangle}$, also $H_{ij} = \overline{H_{ji}}$, d.h. $H = \overline{H}'$.

(v) Ist die herm. Sesquilin.form ist positiv def., so ist $\det H \neq 0$.

Denn: $Hv = 0 \Rightarrow v = 0 \Rightarrow \ker H = 0 \Rightarrow H$ invert. $\Rightarrow \det H \neq 0$.

[Die Umkehrung ist falsch: $H = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ist hermitesch, $\overline{H}' = H$,

$\det H = 1$, aber $\langle e_1, e_1 \rangle = H_{11} = -1 < 0$.]

Kriterium: $H = \overline{H}'$ ist pos. def. $\iff$ alle Hauptminoren sind > 0.

Dabei sind die Hauptminoren die Determinanten der linken oberen quad. Untermatrizen.

(vi) Jedes Skalarprod. definiert eine Norm:

$$\|\cdot\|: V \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$
$$v \longmapsto +\sqrt{\langle v, v\rangle}$$

Bew: • $\forall v \in V$: $\|v\| \geq 0$ und $= 0$ nur für $v \in V$. (pos. def., zeigt auch Wohldef. der Wurzel)

• $\forall \lambda \in \mathbb{K}, v \in V$: $\|\lambda v\| = \sqrt{\langle \lambda v, \lambda v\rangle} = \sqrt{\bar{\lambda}\lambda \langle v, v\rangle} = \sqrt{|\lambda|^2} \cdot \|v\|$
$= |\lambda| \cdot \|v\|$

• Die Δ-Ungl. folgt aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung:
$\forall v, w \in W \quad |\langle v, w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$.

Denn: $\|v+w\|^2 = \langle v+w, v+w\rangle = \|v\|^2 + \underbrace{\langle v, w\rangle + \langle w, v\rangle}_{2\,\mathrm{Re}\langle v, w\rangle} + \|w\|^2$

$$\leq \|v\|^2 + 2|\mathrm{Re}\langle v, w\rangle| + \|w\|^2$$
$$\overset{CSU}{\leq} \|v\|^2 + 2\|v\| \cdot \|w\| + \|w\|^2$$
$$= (\|v\| + \|w\|)^2 \quad \Rightarrow \quad \|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|.$$

Selbstadjungierte Abbildungen

Sei $<\cdot,\cdot>$ eine herm. Sesquilinearform $V \times V \to \mathbb{K}$.

Seien N und M aus $\mathrm{End}(V)$. Dann heißt N die zu M bzgl. $<\cdot,\cdot>$ adjungierte Abbildung, falls f.a. $v, w \in V$:

$$< Mv, w > = < v, Nw >.$$

Notation: $M^* = N$.

(Bsp: $<\cdot,\cdot>$ Standardskalarprod., $M \in M_{n,n}(\mathbb{K})$. Dann ist

$$\underset{(\sum_j m_{ij} v_j)_i}{< Mv, w >} = \sum_i \overline{\sum_j m_{ij} v_j} \cdot w_i = \sum_j \overline{v_j} \sum_i \overline{m_{ij}} \cdot w_i = < v, \overline{M}' w >.$$

$$\Rightarrow \overline{M}' = M^* \ . \ )$$

Bem: Ist $V = \mathbb{K}^n$ und $<\cdot,\cdot>$ nicht ausgeartete hermitesche Sesquilin.form, dann besitzt jedes $M \in \mathrm{End}(V)$ eine eindeutig bestimmte Adjungierte M^*. Es gilt $(M^*)^* = M$.

Bew: Sei $<v,w> = \overline{v}' H w$. Da $<\cdot,\cdot>$ nicht ausgeartet, ist H invertierbar.

$$< Mv, w > = \overline{v}' \overline{M}' H w = \overline{v}' H (H^{-1} \overline{M}' H) w = < v, (H^{-1} \overline{M}' H) w >,$$

also $M^* = H^{-1} \overline{M}' H$ eind. best.

sowie $$(M^*)^* = H^{-1} \overline{(H^{-1} \overline{M}' H)}' H = H^{-1} \overline{H}' M \overline{H}'^{-1} H \underset{H \text{ hermitesch.}}{=} H^{-1} H \cdot M H^{-1} H = M.$$

Def: $M \in \mathrm{End}(V)$ heißt selbstadjungiert (s.a.), wenn $M^* = M$.

— " — normal, wenn $M^* \cdot M = M \cdot M^*$.

Insbes. sind s.a. Endom. normal, und gilt $M^* = -M$, dann ist auch M normal.

Bem: (i) Jeder Endom. M (eines endl. dim. $\mathbb{K}$VR) ist Summe zweier normaler Endom., $M = M_1 + M_2$ mit $M_1^* = M_1$ und $M_2^* = -M_2$.

Bew: Setze $M_1 = \frac{1}{2}(M+M^*)$, $M_2 = \frac{1}{2}(M - M^*)$.

(ii) M ist <u>normal</u> $\Longleftrightarrow$ $M_1 M_2 = M_2 M_1$.

(iii) ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, dann ist $M = M^* \Longleftrightarrow (iM)^* = -iM$.

Bem: Sei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ herm. Sesquilin. form auf $\mathbb{K}$-VR und $M: V \to V$ s.a.

Dann definiert $\langle Mv, w\rangle$

wieder eine herm. Sesquilin. form auf V.

Insbes. gilt $\langle Mv, v\rangle \in \mathbb{R}$ f.a. $v \in V$.

Bew: - Sesquilinearität ist sofort klar.

- Hermizität: $\langle Mw, v\rangle = \langle w, M^* v\rangle \overset{M \text{ s.a.}}{=} \langle w, Mv\rangle$

$$\overset{\langle\cdot,\cdot\rangle \text{ herm.}}{=} \overline{\langle Mv, w\rangle}$$

also $\langle M\cdot, \cdot\rangle$ hermitesch. $\boxed{B}$

Zusatz: Wird $\langle\cdot,\cdot\rangle$ durch H geg., $\langle v, w\rangle = \bar{v}' H w$, so wird $\langle M\cdot, \cdot\rangle$ geg. durch $H_1 = H \cdot M$. Insbes. ist $H_1 = \bar{H}_1'$ hermitesch.

Bew.: $\langle Mv, w\rangle = \bar{v}' \bar{M}' H w = \bar{v}' H M w$

denn $\bar{M}' H = \overline{(H^{-1} \bar{M}' H)}' H = \bar{H}' M \overline{H^{-1}}' H = \bar{H}' M = HM$.

D.h.:

Kor: Ist V endl. dim $\mathbb{K}$-VR mit fixierter pos. def. herm. Sesquilin. form $\langle\cdot,\cdot\rangle$, dann entsprechen die herm. Sesqu. form $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ auf V umkehrbar eindeutig den bzgl $\langle\cdot,\cdot\rangle$ s.a. Endom. $M \in \mathrm{End}(V)$ vermöge der Zuordnung

$$\langle v, w\rangle_1 = \langle Mv, w\rangle .$$

Der Spektralsatz

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Satz: Sei V endl. dim. $\mathbb{K}$-VR, $\langle \cdot , \cdot \rangle$ pos. def. herm. Sesquilinearform auf V, $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ ein s.a. Endom. bzgl $\langle \cdot , \cdot \rangle$.

Dann existiert eine Orthonormalbasis (ONB) $b_1, \dots, b_n$ von V,

$$\langle b_i, b_j \rangle = \delta_{ij}, \qquad i,j = 1, \dots, n$$

die aus Eigenvektoren von φ besteht;

$$\varphi(b_i) = \lambda_i b_i \qquad , i = 1, \dots, n,$$

wobei die $\lambda_i \in \mathbb{R}$ <u>reelle</u> Eigenwerte sind.

Diese kann man sogar noch anordnen: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$.

Kor: Jede reelle symm. $(n \times n)$-Matrix hat n reelle Eigenwerte. ($\langle \cdot , \cdot \rangle$ Standard-Skalarprod.)
Insbes. zerfällt das char. Pol. über $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren.

Kor: Jede herm. Matrix H, die ein Skalarprod. $\langle \cdot , \cdot \rangle_1$ beschreibt, d.h. pos. def. ist, hat n <u>positive</u> reelle EW.

$H \hat{=} \varphi$

(Es ist bzgl. Standardskalarprod $\langle \cdot , \cdot \rangle$: $\langle v, w \rangle_1 = \langle Hv, w \rangle$.
Sei $b_1, \dots, b_n$ ONB wie oben: $Hb_i = \lambda_i b_i \Rightarrow 0 < \langle b_i, b_i \rangle_1 = \overline{b_i}^t H b_i$
$= \overline{b_i}^t \lambda_i b_i = \lambda_i \langle b_i, b_i \rangle = \lambda_i$.)

Beweis: 1) Hilfsfkt $f: V\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$v \longmapsto \frac{\langle Mv, v\rangle}{\langle v, v\rangle}$$

- Wohldef., da $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (pos.) definit
- Die Zähler u. Nenn sequilin., ist $f(\lambda v) = \frac{\langle M(\lambda v), \lambda v\rangle}{\langle \lambda v, \lambda v\rangle} = \frac{\bar{\lambda}\lambda \langle Mv, v\rangle}{\bar{\lambda}\lambda \langle v, v\rangle}$

$= f(v)$ für $\lambda \in \mathbb{K}^{\times}$.

D.h. f ist konstant auf den Geraden durch Null.

- f ist stetig

Es folgt: auf der kompakten Sphäre $S^1 = \{v \in V \mid \langle v, v\rangle = 1\}$ nimmt f sein Maximum in einem Pkt $v_0 \in S^1$ an.

2) Beh: v_0 ist ein Eigenvektor von M.

Bew: Sei $v \in V\setminus\{0\}$ bel. die Fkt $g: \begin{matrix} t \longmapsto g(t) = f(v_0 + tv) \\ (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R} \end{matrix}$

ist stetig und hat ein Maximum in $t = 0$.

Andererseits ist

$$g(t) \underset{\substack{M \text{ s.a.} \\ \langle\cdot,\cdot\rangle \text{ herm.}}}{=} \frac{t^2\langle Mv, v\rangle + 2t\,\mathrm{Re}\langle Mv_0, v\rangle + \langle Mv_0, v_0\rangle}{t^2\langle v, v\rangle + 2t\,\mathrm{Re}\langle v_0, v\rangle + \langle v_0, v_0\rangle},$$

also

$$\frac{d}{dt} g(t)\Big|_{t=0} = \frac{2\,\mathrm{Re}\langle Mv_0, v\rangle \cdot \langle v_0, v_0\rangle - \langle Mv_0, v_0\rangle\, 2\,\mathrm{Re}\langle v_0, v\rangle}{\langle v_0, v_0\rangle^2} \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}\langle Mv_0, v\rangle \cdot \underbrace{\langle v_0, v_0\rangle}_{=1} = \mathrm{Re}\langle v_0, v\rangle \cdot \underbrace{\langle Mv_0, v_0\rangle}_{=:\lambda_0 \in \mathbb{R}}$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{Re}\langle (M - \lambda_0)v_0, v\rangle = 0.$$

Es ist aber $\langle\cdot,\cdot\rangle$ nicht ausgeartet,

und $v \in V\setminus\{0\}$ kann bel. gewählt werden.

$\Rightarrow \quad (M-\lambda_0)\, v_0 = 0 \quad$, d.h. $\quad Mv_0 = \lambda_0 v_0$,

also ist v_0 EV von M zum EW $\lambda_0 = \dfrac{\langle Mv_0, v_0\rangle}{\langle v_0, v_0\rangle}$

3) Beh: Es gibt eine Zerlegung $\quad V = \mathbb{K}\cdot v_0 \oplus v_0^{\perp}$,

wobei M die U-VR $\mathbb{K}\cdot v_0$ und $v_0^{\perp} = \{v \in V \mid \langle v, v_0\rangle = 0\}$

in sich abbildet.

Bew: Sicher ist $M(\mathbb{K}v_0) = \mathbb{K}\, Mv_0 = \lambda_0 \cdot \mathbb{K} v_0 = \mathbb{K} v_0$.

Außerdem ist für $v \in v_0^{\perp}$: $\quad \langle Mv, v_0\rangle \underset{\substack{\uparrow \\ M\ \text{s.a.}}}{=} \langle v, Mv_0\rangle = \lambda_0 \langle v, v_0\rangle = 0$,

also gilt $Mv_0^{\perp} \subset v_0^{\perp}$.

Jeder Vektor $w \in V$ läßt sich schreiben als

$$w = \frac{\langle v_0, w\rangle}{\langle v_0, v_0\rangle} v_0 + \underbrace{\left(w - \frac{\langle v_0, w\rangle}{\langle v_0, v_0\rangle} v_0\right)}_{\tilde{\omega}},$$

und $\omega' \in v_0^{\perp}$, denn $\quad \left\langle \omega - \dfrac{\langle v_0, \omega\rangle}{\langle v_0, v_0\rangle} v_0, v_0 \right\rangle = \langle \omega, v_0\rangle - \dfrac{\overline{\langle v_0, \omega\rangle}}{\langle v_0, v_0\rangle} \cdot \langle v_0, v_0\rangle$

$$= \langle \omega, v_0\rangle - \langle \omega, v_0\rangle = 0.$$

$\Rightarrow \quad V = \mathbb{K} v_0 + v_0^{\perp}$, und diese Summe ist direkt, weil

$\langle \lambda v_0, v_0\rangle = \bar{\lambda} \cdot \langle v_0, v_0\rangle = \bar{\lambda}$, d.h. $\lambda v_0 \in \mathbb{K}v_0 \cap v_0^{\perp}$

$\Leftrightarrow \bar{\lambda} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda v_0 = 0$. $\square$

4) Nun hat man Beh. zurückgeführt auf niederdimensionalen Fall:

$v_0^{\perp} \subsetneq V$, $\dim v_0^{\perp} = \dim V - 1$, und $\langle\cdot,\cdot\rangle|_{v_0^{\perp}\times v_0^{\perp}}$ ist auf $v_0^{\perp}$

pos. def. sesquilin. Form, $M|_{v_0^{\perp}} \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(v_0^{\perp})$. Beh. folgt durch Induktion! $\square$

(dim = 1 ist klar, oder folgt aus 1) + 2) !)