Plenarübung zur Analysis II, 10.5.2016

Rechenregeln für das $\wedge$-Produkt

$$\wedge : A^i(U) \times A^j(U) \longrightarrow A^{i+j}(U)$$

$$dx_I \wedge dx_J = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } I \cap J \neq \emptyset \\ \operatorname{sign}(\sigma)\, dx_{I \cup J} & \text{ sonst} \end{cases},$$

wo σ eine Perm. $\in S_n$, die $(k_1, \dots, k_i, l_1, \dots, l_j)$ in nat. Reihenfolge bringt

$k_1 < \dots < k_i$ aus I

$l_1 < \dots < l_j$ aus J

Sonst $\left(\sum_I f_I dx_I\right) \wedge \left(\sum_J g_J dx_J\right) = \sum_{I,J} f_I \cdot g_J \, dx_I \wedge dx_J$

wird distributiv ausmultipliziert.

Insbes.:
- $dx_i \wedge dx_j = - dx_j \wedge dx_i$
- $dx_i \wedge dx_i = 0$
- $\eta \in A^i(U), \omega \in A^j(U)$: $\quad \eta \wedge \omega = (-1)^{i \cdot j} \omega \wedge \eta$

Bsp: 1) $dx \wedge dy \wedge dz = dy \wedge dz \wedge dx = dz \wedge dx \wedge dy$

$$= - dy \wedge dx \wedge dz = - dx \wedge dz \wedge dy$$

$$= - dz \wedge dy \wedge dx$$

2) $(dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4) \wedge (dx_1 + dx_2 + dx_3 + dx_4)$

$$= dx_3 \wedge dx_4 \wedge dx_1 + dx_3 \wedge dx_4 \wedge dx_2 + dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4$$

$$= dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4$$

Cartan - Ableitung

$U \subset \mathbb{R}^n$

$$d: A^i(U) \longrightarrow A^{i+1}(U) \qquad (\text{für alle } i)$$

$$\underset{C^\infty(U)}{\overset{\parallel}{A^0(U)}} \xrightarrow{d} A^1(U) \xrightarrow{d} A^2(U) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} A^i(U) \xrightarrow{d} A^{i+1}(U) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} A^n(U) \xrightarrow{d} \underset{A^{n+1}(U)}{\overset{\parallel}{0}}$$

$$d^2 = 0$$

$$\boxed{d(f_I\, dx_I) = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}(f_I) \cdot dx_i \wedge dx_I = d(f_I) \wedge dx_I}$$

linear fortgesetzt, d.h. $d\Big(\sum_{|I|=i} f_I\, dx_I\Big) = \sum_I d(f_I\, dx_I)$

Bsp: 1) $d\big((\cos(x)+\cos(y))\,dx + \sin(x)\,dy\big)$ (auf $U = \mathbb{R}^2$)

$= -\sin x \cdot dx \wedge dx - \sin y\, dy \wedge dx + \cos x\, dx \wedge dy$

$= (\cos x + \sin y)\, dx \wedge dy.$

2) $d(e^{\|x\|^2}) = d(e^{x_1^2+\ldots+x_n^2})$ (totales Differential)

$= 2x_1 e^{\|x\|^2} dx_1 + 2x_2 e^{\|x\|^2} dx_2 + \ldots + 2x_n e^{\|x\|^2} dx_n$

$= 2e^{\|x\|^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i dx_i \quad \in A^1(\mathbb{R}^n)$

oder Bez.: · Gradient $d: A^0(U) \to A^1(U)$

· Divergenz $d: A^{n-1}(U) \to A^n(U)$

· Rotation $d: A^1(U) \to A^2(U)$, wo $U \subset \mathbb{R}^3$

3) $d(dx_i) = d(1 \cdot dx_i) = \sum_j 0 \cdot dx_j \wedge dx_i = 0$

wichtigste Eigenschaft: $\boxed{d^2 = 0}$

Beweis: Für $i = 0$: $d^2(f) = d(df) = d\Big(\sum_i \partial_{x_i}(f)\, dx_i\Big)$

$= \sum_{j,i} \partial_{x_j}\partial_{x_i}(f)\, dx_j \wedge dx_i = 0$, denn

- für $j = i$ ist $dx_j \wedge dx_i = 0$,
- für $j \neq i$ gibt es den Summanden $\partial_{x_j}\partial_{x_i}(f)\, dx_j \wedge dx_i$ sowie den Summanden $\partial_{x_i}\partial_{x_j}(f)\, dx_i \wedge dx_j = -\partial_{x_j}\partial_{x_i}(f)\, dx_j \wedge dx_i$.

Diese heben sich also auf.

Für $i > 0$: $d^2(f\,dx_I) = d(d(f\,dx_I)) = d(d(f) \wedge dx_I)$
$= d^2(f) \wedge dx_I = 0 \wedge dx_I = 0$.

Eine Diagramm wie

$$\ldots \to A^{i-1}(U) \xrightarrow{d_{i-1}} A^i(U) \xrightarrow{d_i} A^{i+1}(U) \to \ldots$$

mit der Eigenschaft $d^2 = 0$ an allen Stellen i heißt Komplex (oder Sequenz).

$d^2 = 0$ anders ausgedrückt heißt

$$\mathrm{Im}(d_{i-1}) \subseteq \ker(d_i)$$
$$\subseteq A^i(U) \supseteq$$

[Eine Sequenz heißt exakt, wenn überall $\mathrm{Im}(d_{i-1}) = \ker(d_i)$ gilt.]

Eine Form $\omega \in A^i(U)$ heißt exakt, wenn

$\omega \in \mathrm{Im}(d_{i-1})$, d.h. ex. $\eta \in A^{i-1}(U)$ so, dass $\omega = d\eta$.

Eine Form $\omega \in A^i(U)$ heißt geschlossen, wenn $\omega \in \ker(d_i)$, d.h. $d\omega = 0$.

$d^2 = 0$ heißt: $\mathrm{Im}(d_{i-1}) \subseteq \ker(d_i)$, also exakte Formen sind geschlossene Formen.

Aber: Nicht immer gilt $\mathrm{Im}(d_{i-1}) = \ker(d_i)$.

Manchmal aber schon:

Poincaré-Lemma: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ und sternförmig.
Sei $\omega \in A^i(U)$.

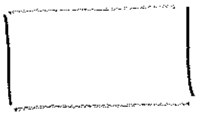
Dann gilt: ~~für~~ für $i > 0$: $d\omega = 0 \Longrightarrow \exists\, \eta \in A^{i-1}(U): d\eta = \omega$

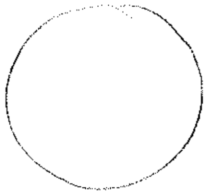
Für $i = 0$: $d\omega = 0 \Longrightarrow \omega \in A^0(U)$ konstant.

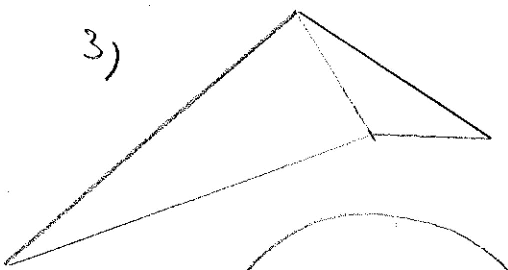
Was heißt sternförmig?

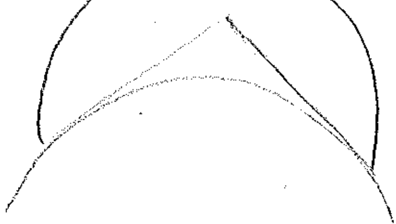
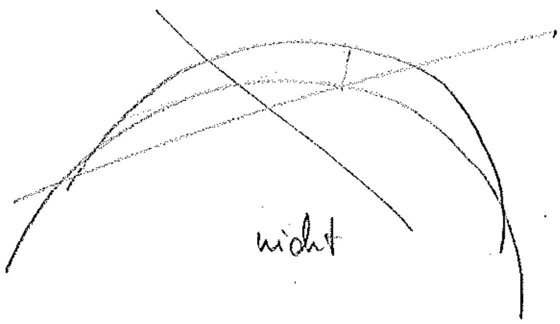
Def: Eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt sternförmig, wenn sie (mind.) einen Pkt $x_0 \in U$ enthält (x_0 Sternmittelpkt) so, dass mit $x \in U$ auch die ganze Verbindungslinie

$$\{x_0 + t(x - x_0) \mid 0 \le t \le 1\}$$ in U liegt.

Bsp: 1) offene Quader , jeder Pkt Sternmittelpkt

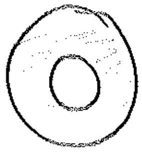
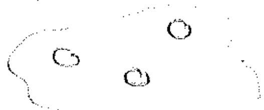
2) offene Kugeln , — " —

3)  bel. Vierecke, jeder Pkt auf der inneren Diagonalen ist Sternmittelpkt.

4)  

nicht

5) $\mathbb{R}^n$

Keine Sterngebiete sind z.B. Ringgebiete , oder sonstige offene Mengen mit "Löchern" $\mathbb{R}^n \setminus \{pkt\}$, 

7: Wieso wollen wir so sehr, dass $\mathrm{Im}(d_{i-1}) = \ker(d_i)$?

D.h. wieso hätten wir so gerne, dass die geschlossenen Formen genau die exakten sind?

A: Ableiten ist einfach, Integrieren nicht.

D.h. zu prüfen, ob eine Form geschlossen ist, ist einfach, aber zu prüfen, ob eine Form exakt ist, ist i.a. schwierig.

Jedenfalls haben wir i. Allg. eine notw. Bedingung!

1-dim Fall: $U \subset \mathbb{R}$ $\quad C^\infty(U) = A^0(U) \xrightarrow{d} A^1(U) = C^\infty(U) \cdot dx$

$$f \longmapsto df = f' \cdot dx$$

Da jede C^∞-Fkt g stetig, besitzt sie Stammfkt G (Hauptsatz!)

$$dG = G' dx = g\,dx \;.$$

Bsp: Ist $g = \begin{pmatrix} a(x,y,z) \\ b(x,y,z) \\ c(x,y,z) \end{pmatrix}^t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ Ableitung einer C^∞-Fkt $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $Df = g$

d.h. ex. f so, dass $df \stackrel{?}{=} \overbrace{a(x,y,z)\,dx + b(x,y,z)\,dy + c(x,y,z)\,dz}^{\omega}$

$$\Leftrightarrow \partial_x f \stackrel{?}{=} a(x,y,z),\ \partial_y f \stackrel{?}{=} b(x,y,z),\ \partial_z f \stackrel{?}{=} c(x,y,z)$$

Da $\mathbb{R}^3$ Sterngebiet, ist das glbed. mit $d\omega = 0$. (Poincaré-Lemma)

Konkretes Bsp:

(a) $\begin{pmatrix} \cos x \\ \cos y \\ \cos z \end{pmatrix}$ $\leadsto d\omega = 0$ ✓, $f = \sin x + \sin y + \sin z$

(b) $\begin{pmatrix} \cos y \\ \cos z \\ \cos x \end{pmatrix}$ $\leadsto d\omega = -\sin y\, dy \wedge dx - \sin z\, dz \wedge dy - \sin x\, dx \wedge dz \neq 0$

$\omega = \cos y\, dx + \cos z\, dy + \cos x\, dz$

[(c) $\begin{pmatrix} \cos z \\ \cos y \\ \cos x \end{pmatrix}$ $\leadsto \omega = \cos z\, dx + \cos y\, dy + \cos x\, dz \Rightarrow d\omega = -\sin z\, dz \wedge dx - \sin x\, dx \wedge dz$

$= (\sin x - \sin z)\, dx \wedge dz \neq 0$.]

(d) $\begin{pmatrix} y e^{xy} \\ x e^{xy} \\ 0 \end{pmatrix}$, $G = e^{xy}$

(e) $\begin{pmatrix} y\cos(xy) + z\cos(xz) \\ x\cos(xy) \\ x\cos(xz) \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} y\cos(xy) + z\cos(xz) \\ z\cos(xy) \\ y\cos(xz) \end{pmatrix}$?

$\uparrow G = \sin(xy) + \sin(xz)$