Übungen zur Analysis II — Blatt 2

Prof. Dr. R. Weissauer — Sommersemester 2016
Dr. K. Maurischat — Abgabe: 6. Mai 2016, 11.00 Uhr

Begründen bzw. beweisen Sie Ihre Antworten!

5. Aufgabe: (4 Punkte) Es sei $B(\mathbb{R}^n) = C_c(\mathbb{R}^n)$ der Verband der stetigen reellwertigen Funktionen mit kompaktem Träger auf dem $\mathbb{R}^n$. Sei $B^+(\mathbb{R}^n)$ die monotone Hülle von $B(\mathbb{R}^n)$ mit Werten in $\mathbb{R}^+$. Zeigen Sie, jede **reellwertige** Funktion $f \in B^+(\mathbb{R}^n)$ ist **unter**halb stetig, das heißt zu jedem $x \in \mathbb{R}^n$ und jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ so, dass für alle $y \in \mathbb{R}^n$ mit $\|y - x\| < \delta$ gilt

$$f(y) \; > \; f(x) - \epsilon \, .$$

6. Aufgabe: (4 Punkte) Es sei $(\mathbb{N}, d)$ der diskrete metrische Raum der natürlichen Zahlen als Teilraum der reellen Zahlen versehen mit der euklidischen Metrik (s. Aufgabe 3).

(a) Identifizieren Sie den Verband $B = C_c(\mathbb{N})$ der reellwertigen stetigen Funktionen auf $\mathbb{N}$ mit kompaktem Träger mit dem Vektorraum der endlichen Folgen in $\mathbb{R}$.

(b) Bestimmen Sie die monotone Hülle B^+ mit Werten in $\mathbb{R}^+$.

Zusatz: Zeigen Sie, die Folge der Verbesserungen der Aufgabenstellungen

$$(\text{Aufgabe } M(n))_n$$

ist monoton und besitzt sogar eine stetige Grenzfunktion mit Werten im Intervall [Freitag,Freitag+7]. Wie müßte das Intervall gewählt werden, damit die Folge Ihrer Lösungen in $B^+(\mathbb{N})$ liegt?

7. Aufgabe: (4 Punkte) Es seien B und B^+ wie in Aufgabe 6.

(a) Zeigen Sie, $I(f) = \sum_{x \in \mathbb{N}} f(x)$ ist wohldefiniert und ein abstraktes Integral auf B mit Werten in $\mathbb{R}$.

(b) Bestimmen Sie $I^+ : B^+ \to \mathbb{R}^+$, das heißt bestimmen Sie $I^+(f)$ für eine Funktion $f \in B^+$. Für welche $f \in B^+$ ist $I^+(f) \in \mathbb{R}$?

8. Aufgabe: (4 Punkte) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) \; = \; \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \, . \end{cases}$$

Zeigen Sie,

(a) die partiellen Ableitungen von f in $(x,y) = (0,0)$ existieren.

(b) f ist in $(x,y) = (0,0)$ nicht differenzierbar.

Die Übungsblätter zur Vorlesung Analysis II sind auch erhältlich unter
http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~kmaurisc/analysisII_SoSe16.htm