AOR Dr. Hendrik Kasten
Institut für Mathematik

FAKULTÄT FÜR
MATHEMATIK UND INFORMATIK

UNIVERSITÄT
HEIDELBERG
ZUKUNFT
SEIT 1386

Seminarprogramm Wintersemester 2025

Dirichlet-Reihen

Voraussetzungen: Funktionentheorie 1.

Vorbesprechung: am 21. 7. 2025 um 13 Uhr s.t. in Seminarraum 5 in INF 205.

Vorträge

1 Dirichlet-Reihen: Analytische Theorie — 16. 10. 2025

Wir führen den Begriff der *Dirichlet-Reihe* als eine mögliche Verallgemeinerung der aus der Funktionentheorie bekannten Potenzreihen ein und studieren das Konvergenzverhalten solcher Reihen. Besonders wichtig ist der Spezialfall der *gewöhnlichen Dirichlet-Reihen*, die keine Potenzreihen sind und die wir in den Folgevorträgen ausschließlich studieren wollen. Diese konvergieren immer in einer rechten Halbebene $\mathrm{Re}(s) > \sigma_0$ der komplexen s-Ebene. Abschließend zeigen wir noch den *Satz von Landau*, der für bestimmte gewöhnliche Dirichlet-Reihen eine Singularität auf der Konvergenzabszisse $\mathrm{Re}(s) = \sigma_0$ garantiert, und den *Identitätssatz* für Dirichlet-Reihen. **Literatur: Abschnitt 1 in [Zag], inklusive einem Beweis für Satz 3.**

2 Unendliche Produkte — 23. 10. 2025

Im weiteren Verlauf des Seminars werden wir immer wieder *unendliche Produkte* aufstellen müssen, etwa bei der Euler-Produktentwicklung von Dirichlet-Reihen oder der Definition der Gammafunktion. Diese formal aufzustellen ist leicht, interessant ist hier allerdings die Frage der Konvergenz. Wir führen also eine saubere Definition für die Konvergenz unendlicher Produkte ein und zeigen die wichtigen Konvergenzkriterien und den *Weierstraß'schen Produktsatz*. **Literatur: Abschnitte 8.3 und 8.4 in [Kas] bis inklusive Korollar 8.26.**

3 Dirichlet-Reihen: Formale Eigenschaften 30. 10. 2025

Ganz abstrakt kann man nun von zwei Dirichlet-Reihen die Summe und das Produkt bilden, letzteres als multiplikative Faltung. Wir zeigen, dass die Summe zweier konvergenter Dirichlet-Reihen konvergiert, und das Produkt auch, wenn mindestens einer der Faktoren absolut konvergiert. Wir lernen anhand von Beispielen *multiplikative* und *streng multiplikative* Funktionen auf den natürlichen Zahlen kennen und zeigen, dass Dirichlet-Reihen, deren Koeffizienten durch eine multiplikative Funktion gegeben sind, eine Darstellung als unendliches Produkt über alle Primzahlen haben, als ein so genanntes *Euler-Produkt*. Wir geben Produktdarstellungen für eine Reihe von Dirichlet-Reihen an, wie etwa der Riemann'schen Zetafunktion. Abschließend zeigen wir die *Möbius'sche Umkehrformel*, mit der man multiplikative Funktionen ineinander überführen kann. **Literatur: Abschnitt 2 in [Zag].**

4 Die Riemann'sche Zetafunktion 6. 11. 2025

Eines der wichtigsten Beispiele für Dirichlet-Reihen ist die *Riemann'sche Zetafunktion*, die wir in diesem Vortrag näher kennenlernen wollen. Wir fassen zunächst die bereits bekannten Resultate für Dirichlet-Reihen in diesem Spezialfall zusammen und bestimmen anschließend die Zetawerte an denjenigen ganzen Zahlen, für die diese bekannt sind. Anschließend geben wir noch eine Heuristik für die berühmte Funktionalgleichung der Riemann'schen Zetafunktion. **Literatur: Abschnitt 4 in [Zag]; für den Vortragenden lohnt sich auch ein Blick auf Aufgabe 2 darin.**

5 Charaktere 13. 11. 2025

Die nach der Riemann'schen Zetafunktion wichtigsten Dirichlet-Reihen sind die *Dirichlet'schen L-Reihen*, die eingeführt werden, um den *Dirichlet'schen Primzahlsatz* zu zeigen, dass es in jeder Folge der Art $a+kn$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $\mathrm{ggT}(a,n)=1$ unendlich viele Primzahlen gibt. Die Koeffizienten dieser L-Reihen sind durch die Werte bestimmter Restklassencharaktere gegeben, wenig überraschend heißen diese *Dirichlet-Charaktere*. Wir führen zunächst ganz allgemein *Charaktere* endlicher Gruppen ein und zeigen, dass die Menge der Charaktere zu einer fest gewählten endlichen abelschen Gruppe eine zu dieser Gruppe isomorphe Gruppe bildet, wofür wir aus der Algebra den *Struktursatz für endliche abelsche Gruppen* benötigen. Wir konzentrieren uns dann auf den Spezialfall der Dirichlet-Charaktere und zeigen bestimmte Orthogonalitätsaussagen. Abschließend führen wir den Begriff des *primitiven* Charakters ein und bestimmen alle reellen primitiven Dirichlet-Charaktere. **Literatur: Abschnitt 5 in [Zag].**

6 Dirichlet'sche L-Reihen 20. 11. 2025

Nun wollen wir die bereits im letzten Vortrag angekündigten Dirichlet'schen L-Reihen studieren. Als erstes wichtiges Ergebnis zeigen wir, dass für jeden vom Hauptcharakter verschiedenen Charakter χ die zugehörige L-Reihe $L(\chi; s)$ an der Stelle $s = 1$ nicht verschwindet (aber auch im Unterschied zur Riemann'schen Zetafunktion keinen Pol hat). Als ein Korollar folgt der Dirichlet'sche Primzahlsatz. **Literatur: Abschnitt 6 in [Zag].**

7 Werte von L-Reihen an negativen ganzen Stellen 27. 11. 2025

Analog zu den Untersuchungen in Vortrag 5 wollen wir nun die spezielle Werte der Dirichlet'schen L-Reihen an den negativen ganzen Zahlen untersuchen. Das gelingt mit einer konkreten Formel, in der außer Charakterwerten nur noch die in Vortrag 5 eingeführten Bernoulli-Zahlen vorkommen. **Literatur: Abschnitt 7 in [Zag].**

8 Binäre quadratische Formen 4. 12. 2025

Wir lassen noch einmal kurz von den Dirichlet-Reihen ab, um *(binäre) quadratische Formen* einzuführen. Diese wollen wir klassifizieren, weshalb wir zunächst eine Äquivalenzrelation auf der Menge der binären quadratischen Formen und dann den Begriff der *Diskriminante* definieren. Letzterer ist auf Äquivalenzklassen wohldefininiert, und es gibt zu jeder Diskriminante D auch nur endlich viele Äquivalenzklassen; cum grano salis nennt man deren Anzahl die *Klassenzahl* h_D. Die Bestimmung derselben ist das erste große Ziel in der Theorie der quadratischen Formen. Wir entwerfen eine Strategie dafür und beweisen deren ersten Schritt. **Literatur: Abschnitt 8 in [Zag] bis exklusive Satz 3.**

9 Die Klassenzahl 11. 12. 2025

Wir vollenden die Agenda des vorherigen Vortrags und sehen, dass die Klassenzahl h_D bis auf eine gut kontrollierbare Konstante gerade der spezielle L-Reihenwert $L(\chi_D; 1)$ ist. Hierbei ist χ_D ein durch die Diskriminante D bestimmter Dirichlet-Charakter. **Literatur: der Rest von Abschnitt 8 in [Zag].**

10 Die Berechnung von $L(\chi; 1)$ 18. 12. 2025

Die beiden letzten Vorträge haben uns einen guten Grund geliefert, die speziellen Werte der Dirichlet'schen L-Funktionen an der Stelle $s = 1$ genauer zu untersuchen. Dies wollen wir in diesem Vortrag tun. Zunächst führen wir dafür die so genannten *Gauß'schen Summen* ein und studieren diese. Mit diesem Hilfsmittel finden wir eine Formel für die speziellen L-Werte, die nur Charakterwerte und die Diskriminante als Zutaten enthält. **Literatur: Abschnitt 9 in [Zag] bis inklusive Satz 3. Der Rest des Abschnitts ist ein an Beispielen orientierter Ausblick, der in Absprache mit mir kurz zusammengefasst werden soll.**

11 Grundlegendes zu Modulformen 8. 1. 2026

Im letzten Teil unseres Seminars wollen wir komplexwertige Funktionen studieren, die ein besonders schönes Verhalten unter einer bestimmten Operation von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ zeigen. Insbesondere lassen solche Funktionen eine Fourierentwicklung zu. Solche Funktionen nennt man *Modulformen* und bei geeignetem Verhalten für große Imaginärteile *Spitzenformen*; sie spielen eine gewichtige Rolle in der analytischen Zahlentheorie. Unser letztendliches Ziel ist es natürlich, jeder Modulform eine Dirichlet-Reihe zuzuordnen, doch in diesem Vortrag wollen wir uns zunächst mit dem neuen Begriff vertraut machen. **Literatur: Abschnitte III.1.1 - III.1.6 in [KK].**

12 Hecke-Operatoren 15. 1. 2026

Wir führen auf dem Raum der Modulformen für jede natürliche Zahl n einen Operator T_n ein, und zwar so, dass eine große Klasse von Modulformen simultane Eigenform für alle T_n ist. Wenn wir eine solche Modulform f betrachten, können wir durch Normierung stets erreichen, dass der Eigenwert unter dem jeweiligen Operator T_n gerade der n-te Fourier-Koeffizient von f ist. Die so eingeführten Operatoren heißen die *Hecke-Operatoren*. **Literatur: Abschnitte IV.1.1 - IV.1.3 in [KK] und Abschnitt IV.1.4 ohne das Beispiel mit der Diskriminante.**

13 Hecke'sche L-Reihen 22. 1. 2026

Mit den Fourier-Koeffizienten als Koeffizienten können wir die Dirichlet-Reihe einer Modulform definieren. Wir berechnen deren Konvergenzabszisse und finden für Hecke-Eigenformen eine schöne Euler-Produktzerlegung. Für letzteres benötigen wir Rechenregeln für die Hecke-Operatoren, was wir skizzenhaft herleiten. **Literatur: Abschnitte IV.4.4 und IV.4.8 in [KK]. Skizzenhaft sollen auch die Ergebnisse der Abschnitte IV.2.1 - IV.2.3 präsentiert werden.**

Literatur

[KK] M. Koecher, A. Krieg. *Elliptische Funktionen und Modulformen (2. Auflage)*. Springer, 2007.

[Kas] H. Kasten. *Funktionentheorie 1 (Skript)*.

[Zag] D. Zagier. *Zetafunktionen und quadratische Körper*. Springer, 1981.