Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Winfried Kohnen
Johann Franke

08. Januar 2017

Funktionentheorie 2 – Übungsblatt 10

Wintersemester 2017/18

Aufgabe 1 (2+2 Punkte)

Für $2 \leq k \in \mathbb{N}$ sei M_k der Vektorraum der Modulformen vom Gewicht k für $\Gamma(1) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, das heißt derjenigen Funktionen $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ mit

(i) $f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z)$ für alle $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma(1)$,

(ii) f hat eine Fourierentwicklung $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n e^{2\pi i n z}$, die für alle $z \in \mathbb{H}$ konvergiert.

Zeigen Sie für $f \in M_k$ und $g \in M_\ell$ die folgenden Aussagen:

(a) $\ell f' g - k f g' \in M_{k+\ell+2}$,

(b) $\ell(\ell+1) f'' g - 2(k+1)(\ell+1) f' g' + k(k+1) f g'' \in M_{k+\ell+4}$.

Aufgabe 2 (0 Punkte)

Es sei N eine positive ganze Zahl und $\Gamma_0(N)$ die Menge aller Matrizen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(1)$ so dass $c \equiv 0 \mod N$. Wie man leicht sieht ist $\Gamma_0(N)$ dann eine Untergruppe von $\Gamma(1)$.

(a) Es seien $S\tau = -\frac{1}{\tau}$ und $T\tau = \tau + 1$ Stürzung resp. Translation. Diese erzeugen, wie wir wissen, die volle Modulgruppe $\Gamma(1)$. Es sei p eine Primzahl. Dann gibt es zu jedem $V \in \Gamma(1)$ mit $V \notin \Gamma_0(p)$ ein Element $P \in \Gamma_0(p)$ und eine ganze Zahl $0 \leq k < p$ so dass

$$V = PST^k.$$

(b) Es bezeichne $\mathscr{F}$ den Standard-Fundamentalbereich der vollen Modulgruppe $\Gamma(1)$ aus der Vorlesung und p eine Primzahl. Zeigen Sie, dass

$$\mathscr{F} \cup \bigcup_{k=0}^{p-1} ST^k(\mathscr{F})$$

ein Fundamentalbereich der Untergruppe $\Gamma_0(p)$ ist.

Abgabe: Montag, 15.01, bis spätestens 11 Uhr ct. in den Tutorenbriefkästen in INF 205 im ersten Stock.