Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Winfried Kohnen
Johann Franke

18. Dezember 2017

Funktionentheorie 2 – Übungsblatt 9

Wintersemester 2017/18

Aufgabe 1 (2+2 (+2 Bonus-) Punkte)

Sei $k \geq 4$ eine gerade natürliche Zahl. Für $z \in \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$ sei dann

$$G_k(z) := \sum_{m,n}{}' \frac{1}{(mz+n)^k}.$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Die Reihe $G_k(z)$ ist auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{H}$ gleichmäßig absolut konvergent.

(b) Für alle $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ gilt

$$G_k\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k\, G_k(z).$$

(c) Es gilt die Fourierentwicklung

$$G_k(z) = 2\zeta(k) + \frac{2\,(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) e^{2\pi i n z},$$

wobei $\sigma_{k-1}(n) = \sum_{d \mid n} d^{k-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2 (0 Punkte)

Es sei $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ die für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 1$ definierte Riemannsche Zeta-Funktion.

(a) Zeigen Sie, dass $\zeta(s)$ eine in der Halbebene $\{\mathrm{Re}(s) > 1\}$ holomorphe Funktion ist.

(b) Es bezeichne nun $\vartheta(\tau) := 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{\pi i \tau n^2}$ die Jacobische Thetareihe. Zeigen Sie für alle s mit $\mathrm{Re}(s) > 1$ die Identität

$$\zeta(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}} = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} (\theta(it) - 1)\, t^{\frac{s}{2}-1} \mathrm{d}t.$$

(c) Zeigen Sie (unter Annahme der Funktionalgleichung $\vartheta(i/y) = \sqrt{y}\vartheta(iy)$ für alle y mit $\mathrm{Re}(y) > 0$), dass sich $\Lambda(s) := \zeta(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}$ zu einer in ganz $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ holomorphen Funktion fortsetzen lässt mit einfachen Polen in $s = 0$ bzw. $s = 1$, welche die Funktionalgleichung $\Lambda(1-s) = \Lambda(s)$ erfüllt.

!!! FRÖHLICHE WEIHNACHTEN !!!

Abgabe: Montag, 08.01, bis spätestens 11 Uhr ct. in den Tutorenbriefkästen in INF 205 im ersten Stock.