Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Winfried Kohnen
Johann Franke

13. November 2017

Funktionentheorie 2 – Übungsblatt 4

Wintersemester 2017/18

Aufgabe 1 (2+2 Punkte)

Sei $D_{-\mathbb{N}_0} = \{z \in \mathbb{C} \mid z \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}\}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Für alle $z \in D_{-\mathbb{N}_0}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma(z+n)}{n^z \cdot \Gamma(n)} = 1.$$

(b) Ist $f : D_{-\mathbb{N}_0} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit den Eigenschaften

$$\text{(i)} \quad f(z+1) = zf(z),$$

$$\text{(ii)} \quad 1 = \lim_{n\to\infty} \frac{f(z+n)}{n^z \cdot f(n)},$$

dann gilt bereits $f(z) = f(1) \cdot \Gamma(z)$ für alle $z \in D_{-\mathbb{N}_0}$.

Aufgabe 2 (0 Punkte)

Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\prod_{\nu=0}^{n-1} \Gamma\left(\frac{z+\nu}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{1}{2}-z} \Gamma(z).$$

Aufgabe 3 (0 Punkte)

Es sei X eine Riemannsche Fläche und $U \subset X$ offen. Eine Abbildung $f : U \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ heißt meromorph, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(i) $S := f^{-1}(\infty)$ ist abgeschlossen in U und besteht nur aus isolierten Punkten,

(ii) $f|_{U \setminus S} \in \mathcal{O}(U \setminus S)$,

(iii) es gilt für alle $x_0 \in S$: $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = \infty$.

Abgabe: Montag, 20.11, bis spätestens 11 Uhr ct. in den Tutorenbriefkästen in INF 205 im ersten Stock.

Wir bezeichne $\mathscr{M}(U)$ die Menge der auf U meromorphen Funktionen und $\mathrm{Hol}(Y,Z)$ die Menge holomorpher Funktionen zwischen zwei Riemannschen Flächen Y und Z.

(a) Es sei X eine Riemannsche Fläche. Zeigen Sie, dass $\mathscr{M}(X) = \mathrm{Hol}(X, \mathbb{P}^1(\mathbb{C})) \setminus \{\infty\}$, wobei hier ∞ für die konstante Funktion $f = \infty$ steht.

(b) Bestimmen Sie $\mathscr{M}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$.