Birationale Geometrie arithmetischer Flächen

Seminar im Wintersemester 2008/09

Prof. Alexander Schmidt/Universität Regensburg

Gegeben sei eine glatte projektive Kurve über einem Zahlkörper k. Da diese durch endlich viele Gleichungen gegeben ist, kann man sie zu einem glatten, projektiven Schema der relativen Dimension 1 über einem offenen Unterschema von $Spec(\mathcal{O}_k)$ fortsetzen. Es stellt sich nun die Frage, ob man eine Fortsetzung (ein „Modell") über ganz $Spec(\mathcal{O}_k)$ finden kann, und ob und in welchem Sinne dieses eindeutig ist.

Es stellt sich heraus, dass man stets reguläre, eigentliche Modelle finden kann. Diese sind jedoch im allgemeinen nicht glatt, sondern es gibt „schlechte Fasern". Unter den regulären eigentlichen Modellen gibt es stets ein kleinstes, das sogenannte *minimale reguläre Modell*. Alle anderen regulären Modelle entstehen aus diesem durch Aufblasung (in Geschlecht ≥ 1).

Wir gehen nach

Liu, Q. *Algebraic geometry and arithmetic curves*. Oxford Graduate Texts in Mathematics, 6. Oxford Science Publications. Oxford University Press, Oxford, 2002.

vor. Alle Zitate unten beziehen sich auf dieses Buch.

Vortrag 1: Aufblasungen

In diesem Vortrag soll der Begriff der Aufblasung definiert werden. Man folge Abschnitt 8.1.1. Aufblasungen sind zentral für alles weitere und explizit nicht immer gut zu verstehen. Daher sollen alle Beispiele aus dem Text gebracht werden.

Vortrag 2: Die Universaleigenschaft der Aufblasung

Dieser Vortrag beginnt mit Ex. 1.2, Abschnitt 8.1. Dann soll der Stoff von Abschnitt 8.1.2 vorgestellt werden (also die Universaleigenschaft der Aufblasung erklärt werden). Schließlich sollen Ex. 1.1, 1.6 aus Abschnitt8.1 erklärt werden,

Vortrag 3: Aufblasungen und birationale Morphismen

Der Kern dieses Vortrags ist Theorem 1.24 aus Kap.8. Dieses besagt, dass birationale Morphismen oft Aufblasungen sind. Dazu muss der ganze Abschnitt 8.1.3 gemacht werden. Zum Schluß auch noch Proposition 1.26 bringen.

Vortrag 4: Universelle Kettenförmigkeit und Cohen-Macaulay-Ringe.

Hier und im nächsten Vortrag geht es um kommutative Algebra. Die Klasse der noetherschen Ringe ist noch zu groß, man braucht weitere Eigenschaften, die unter dem Namen „exzellent" zusammengefaßt werden. Vortrag 4 soll Abschnitt 8.2.1 und sowie 8.2.2 bis einschließlich Cor. 2.18 abdecken. Im Beweis von 2.3 c) braucht man 5.23 aus Kapitel 2. Dies auch bringen. Auch gebe man einen Beweis von 2.11 (Liu läßt das weg). Dazu Ex 2.4, 2.5. aus 8.2.

Vortrag 5: Serre's Normalitätskriterium, Nagataringe und exzellente Schemata

Serre's Normalitätskriterium, Kap 8, Theorem 2.23, sowie der Rest von 8.2.2. Abschnitt 8.2.3 bis einschließlich 2.36. Dann noch 2.40 und 2.41 ohne Beweis vorstellen. Schließlich Ex 2.13, 2.15 vorrechnen.

Vortrag 6: Gefaserte Flächen und Desingularisierung

Abschnitt 8.3.1 (Theorem 3.16 ohne Beweis). Dazu (auch ohne Beweis) Thm. 3.42 und 3.44 vorstellen. Dann Example 3.53 und 3.54.

Vortrag 7: Bewertungen und Modelle

In diesem Vortrag soll die Verbindung zwischen der modernen Schema-Sprache nach Grothendieck mit der bewertungstheoretischen nach Zariski in Verbindung gebracht werden. Abgedeckt werden soll Abschnitt 8.3.2 und Ex. 3.14.

Vortrag 8: Kontraktion

Es soll Abschnitt 8.3.3 über Kontraktion („Herunterblasen") behandelt werden. Alles bringen und Ex. 3.5, 3.8 und 3.20 vorrechnen

Vortrag 9: Schnitttheorie auf regulären Flächen I

Abschnitt 9.1.1, Beweise von 1.9 und 1.11 können weggelassen werden. Dann Abschnitt 9.1.2 bis einschließlich Example 1.22.

Vortrag 10: Schnitttheorie auf regulären Flächen II

Abschnitt 9.1.2 Theorem 1.23, dann Corollary 1.24 aber den Begriff der kohomologischen Flachheit vermeiden sondern das Ergebnis in der Form

$$H^0(X, \mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} k(s) \xrightarrow{\sim} H^0(X_s, \mathcal{O}_{X_s})$$

formulieren. Dann alles bis 1.27 und 1.29 bis 1.32 aus Abschnitt 9.1.3.

Vortrag 11: Der kanonische Divisor

Führe die Eigenschaft „lokal vollständiger Durchschnitt" für Morphismen nach Abschnitt 6.3.2 ein. Dann definiere die kanonische Garbe nach Abschnitt 6.4.2. Formuliere das Riemann-Roch Theorem 7.3.26 (ohne Beweis) für Kurven die lokal vollständige Durchschnitte sind unter Verwendung der kanonischen Garbe. Dann zeige man Cor. 3.31. Schließlich gehe man zu Abschnitt 9.1.3 und mache 1.34 bis 1.37.

Vortrag 12: Faktorisierungssatz und Projektionsformel

Abschnitt 9.2.1, insbesondere Theoreme 2.2 und 2.7. Dann Theorem 2.12 und alles aus Abschnitt 9.2.2 was man dazu braucht.

Vortrag 13: Castelnuovos Kriterium

Hier soll Castelnuovos Kriterium für Kontrahierbarkeit bewiesen werden (der ganze Abschnitt 9.3.1).

Vortrag 14: Minimalflächen

Jede reguläre arithmetische Fläche kann nur endlich oft heruntergeblasen werden (ohne die Regularität zu verlieren), dann landet man bei einer relativen Minimalfläche die keine Kontraktionen mehr zuläßt. ist die generische Faser vom Geschlecht ≥ 1 gibt es ein eindeutiges minimales Modell. Abschnitt 9.3.2 und 9.3.3 bis einschließlich Theorem 3.21

Vortrag 15: Reduktion glatter Kurven

Hier soll der Inhalt von Abschnitt 10.2 dargestellt werden. Insbesondere soll erklärt werden, was (potentiell) gute Reduktion ist, und Kriterien (1.24, 1.29) gegeben werden.