Seminar zur homologischen Algebra
(mit Dr. A. Holschbach)

Zeit und Ort: 2 st., Mo 16–18, H 31

Repetitorium: Mi 14–16, M 219 oder nach Absprache

Vorkenntnisse: Lineare Algebra I, II. Soweit darin noch nicht behandelt, sind Grundkenntnisse über Ringe, Moduln und exakte Folgen hilfreich.

Inhalt: Die homologische Algebra ist ein Zweig der Algebra, der sich zu einem unverzichtbaren Hilfsmittel in einer Vielzahl mathematischer Gebiete entwickelt hat, u.a. algebraische Topologie, Zahlentheorie, algebraische Geometrie, Differentialgeometrie und Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen. Das Ziel dieses Seminar ist es, die Grundlagen der homologischen Algebra zu erarbeiten und Anwendungen sowie Beispiele kennenzulernen. In späteren Vorträgen werden wir uns der Kohomologie von Gruppen zuwenden und einige wesentliche Eigenschaften studieren.

Programm

Das Seminar baut zu großen Teilen auf dem Buch "A Course in Homological Algebra" von Hilton und Stammbach auf ([HS], siehe Literaturliste am Ende). In späteren Vorträgen wird auch auf das Buch [We] und als Ergänzung auch auf [Ke] und [La] zurückgegriffen.

Das Seminar umfasst 14 Sitzungen sowie einen Puffertermin am Ende des Semesters. Die Vorträge bauen aufeinander auf; jeder Vortrag umfasst 90 Minuten. Trotz des Puffertermins sollte diese Zeitgrenze nur in Ausnahmefällen überschritten werden. Wenn die Vortragszeit nicht auszureichen scheint, muss eine sinnvolle Auswahl des Stoffes getroffen werden.

Bei Fragen wendet Euch an: Armin Holschbach, M 219, armin.holschbach@mathematik.uni-regensburg.de

Im folgenden sei Λ ein Ring mit 1 (nicht notwendigerweise kommutativ), und G sei eine (zumeist endliche) Gruppe.

1 (Links-)Moduln und Homomorphismen

Wiederhole Λ-Linksmoduln und -Rechtsmoduln und Λ^{opp} mit Beispielen; behandle Homomorphismen, exakte Sequenzen und kommutative Diagramma, zeige das Fünferlemma ([HS], ÜA 1.2) statt Lemma 1.1 (§ I.1). Wiederhole Summen und Produkte mit ihren universalen Eigenschaften Prop. 3.2 & 3.3 ([HS], § I.3). Definiere die Gruppe der Homomorphismen $\mathrm{Hom}_\Lambda(A, B)$ zwischen zwei Λ-Linksmoduln A und B und zeige die beiden kurzen exakten Sequenzen in den Theorem 2.1 und 2.2 ([HS], § I.2). Bestimme als Beispiele $\mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(\mathbb{Z}, B)$ und $\mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, B)$ für beliebiges B.

Vortragender: Tobias Weigl 19.10.2009

2 Projektive und injektive Moduln

Wiederhole kurz den Begriff des freien Moduls und zeige Prop. 4.3. Definiere projektive Moduln und zeige Prop. 4.4-4.7 ([HS], § I.4). Als Beispiel charakterisiere man projektive Moduln über Hauptidealringen ([HS], § I.5, Theorem 5.1 ohne Beweis).
Erläutere das Dualitätsprinzip und definiere injektive Moduln. ([HS], § I.6). Zeige, dass über Hauptidealringe die injektiven Moduln gerade die divisiblen Moduln sind ([HS], § I.7) und zeige, dass jeder Λ-Modul in einen injektiven eingebettet werden kann ([HS], § I.8, Prop 8.3).

Vortragender: Daniel Gahler 26.10.2009

3 Kategorien und Funktoren

Definiere den Begriff der Kategorie und erläutere ihn an Beispielen (**Sets, Gr, Ab, Vekt**$_K$, **Ring,** Λ**-Mod**) ([HS], § II.1). Definiere den Begriff des Funktors (sowohl ko- als auch kontravariant) ([HS], § II.2). Behandle Monomorphismen, Epimorphismen, Dualität, projektive und injektive Objekte ([HS], § II.3) und führe die natürliche Transformation und natürliche Äquivalenz ein ([HS], § II.4). Zum besseren Verständnis ist es ratsam, alle Begriffe am Beispiel der Kategorie der Λ-Moduln zur erläutern.

Vortragender: Rainer Ziereis 2.11.2009

4 Abelsche Kategorien

Behandle Produkte und Koprodukte im kategoriellen Sinne, definiere Nullobjekt, Nullmorphismus (in [HS], § II.1), additive Kategorien, Kern, Kokern (ÜA 3.4 in [HS], § II.3), abelsche Kategorie und kurze exakte Sequenz ([HS], § II.9). Zeige, dass Λ-**Mod** eine abelsche Kategorie ist. Definiere injektive und projektive Objekte in Kategorien und vergleiche mit den Begriffen aus Vortrag 2 ([HS], § II.10).

Vortragende: Irina Hennhöfer & Stefanie Brunsteiner 9.11.2009

5 Kettenkomplexe und Homologie

Definiere Kettenkomplexe, Ketten, Zykel, Ränder, Homologie eines Kettenkomplexes. Dualisiere: Kokettenkomplexe, Kozykel, Koränder, Kohomologie ([HS], § IV.1). Zeige das Schlangenlemma ([HS], III.5.1) und die lange exakte (Ko-) Homologiesequenz ([HS], § IV.2). Definiere Homotopie und zeige [HS], Prop. IV.3.1. Erwähne noch den Begriff der kontrahierenden Homotopie.

Vortragender: Michael Kammermeier 16.11.2009

6 Abgeleitete Funktoren

Definiere projektive und injektive Auflösungen ([HS], § IV.4) und benutze sie zur Definition von abgeleiteten Funktoren. Betrachte insbesondere die Konsequenzen für links- bzw. rechtsexakte Funktoren ([HS], § IV.5). Zeige die lange exakten (Ko-)Homologiesequenz für abgeleitete Funktoren ([HS], § IV.6).

Vortragender: Matthias Schiml 23.11.2009

7 Die Funktoren Ext^n und $\overline{\mathrm{Ext}}^n$

Definiere Ext^n, $\overline{\mathrm{Ext}}^n$ als rechtsabgeleitete Funktoren und zeige deren natürliche Äquivalenz ([HS], §§ IV.7, IV.8). Bringe einige Beispiele ([HS], zweiter Teil von § III.4). Zeige: $\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}}(A, B) = 0$ für alle $n \geq 2$ und alle abelschen Gruppen A, B (Hinweis: Dies folgt daraus, dass jede abelsche Gruppe eine projektive Auflösung der Form $\ldots \to 0 \to 0 \to P_1 \to P_0 \to A \to 0$ hat, vgl. Vortrag 2).

Vortragender: Georg Vögele 30.11.2009

8 Ext^n und Erweiterungen; Tensorprodukte und Tor_n

Zeige: $\mathrm{Ext}^1_{\Lambda}(A, B)$ kodiert die Isomorphieklassen von Erweiterungen von A mit B ([HS], Theorem III.2.4, vgl. auch [We], Theorem 3.4.3).
Wiederhole den Begriff des Tensorprodukts ([HS], Anfang von § III.7), definiere Tor_n als abgeleiteten Funktor ([HS], § IV.11, ohne Theorem 11.2). Zeige: Für eine abelsche Gruppe A ist $\mathrm{Tor}_1(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ isomorph zur Torsionsuntergruppe von A ([HS], ÜA III.8.3; verwendet $\mathrm{Tor}_1(A, \mathbb{Q}) = 0$).

Vortragender: Simon Blume 7.12.2009

9 Gruppen(ko)homologie

Wiederhole den Begriff des Gruppenrings, definiere Augmentationsabbildung und -ideal ([HS], § VI.1). Definiere Gruppen(ko)homologie ([HS], § VI.2) und bestimme H^0, H_0 ([HS], § VI.3) sowie H^1, H_1 bei trivialen G-Moduln ([HS], § VI.4).

Vortragender: Andreas Linner 14.12.2009

10 Verschränkte Homomorphismen; zyklische Gruppen

Deute H^1 im allgemeinen Fall mit Hilfe von verschränkten Homomorphismen ([HS], § VI.5, Kor. 5.2). Behandle semidirekte Produkte und den Zusammenhang zu verschränkten Produkten.
Bestimme die (Ko-)Homologie endlicher zyklischer Gruppen (hier benutze man anstatt [HS], § VI.7 besser [We], Calculation 6.2.1 & Theorem 6.2.2).

Vortragender: Andreas Bräu 21.12.2009

11 Die Querauflösung

Erkläre die homogene und die inhomogene Querauflösung ([HS], § VI.13 (a), (b)) und beschreibe mit ihr die ersten Homologie- und Kohomologiegruppen ($n = 0, 1, 2$). Als Anwendungen lassen sich die Beispiele aus den letzten beiden Vorträgen erneut herleiten. Siehe dazu auch [We], Beispiele 6.5.2, 6.5.6, 6.5.7.

Vortragende: Teresa Scholler 11.1.2010

12 H^2 und Erweiterungen

Zeige: Für eine abelsche Gruppe A, auf der G operiert, klassifiziert Kohomologiegruppe $H^2(G, A)$ die Äquivalenzklassen von Erweiterungen von G mit A, d.h. von exakten Sequenzen $1 \to A \to E \to G \to 1$, die mit der Gruppernoperation verträglich sind ([We], erste Hälfte von § 6.6). Bringe als Anwendung den Satz von Schur-Zassenhaus ([We], 6.6.9).

Vortragende: Daniela Birzer 18.1.2010

13 Galoiskohomologie

Galoiskohomologie ist Gruppenkohomologie, bei der als Gruppe die Galoisgruppe $G = \mathrm{Gal}(L|K)$ einer Körpererweiterung benutzt wird. Zeige Hilberts Satz 90 ([La], Theorem VI.10.1; der Beweis verwendet an einer Stelle Satz VI.4.1). Deute diese Aussage im Falle einer zyklischen Galoisgruppe ([La], VI, § 6) und behandle als Anwendungen die Sätze VI.6.2 und VI.6.4. in loc. cit.

Vortragender: Martin Monath 25.1.2010

14 Brauergruppe

Definiere verschränkte Produkte mit Hilfe von 2-Kozykeln und zeige, das sie zentral einfach sind ([Ke], § 7.5). Beweise, dass bei einer Galoiserweiterung $L|K$ mit Galoisgruppe G die Gruppe $H^2(G, L^\times)$ (die Brauergruppe $\mathrm{Br}(L|K)$ genannt wird) alle verschränkten Produkte über $L|K$ klassifiziert ([Ke], §§ 7.7, 7.8). Gib als Beispiel die beiden verschränkten Produkte, die zu $\mathrm{Br}(\mathbb{C}|\mathbb{R}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ gehören, und zeige, dass für eine Erweiterung von endlichen Körpern $L|K$ die Brauergruppe $\mathrm{Br}(L|K)$ trivial ist (siehe dazu [We], 6.4.8 bzw. die darauf folgende Bemerkung).

Vortragende: Christina Bauer 1.2.2010

Literatur

[HS] Hilton, Peter John und Stammbach, Urs: *A Course in Homological Algebra*, Springer Verlag, 1971

[Ke] Kersten, Ina: *Brauergruppen*, Universitätsverlag Göttingen, 2007

[La] Lang, Serge: *Algebra. Revised 3rd Edition*, Springer Verlag, 2002

[We] Weibel, Charles: *An Introduction to Homological Algebra*, Cambrigde University Press, 1994