

Inhaltsverzeichnis

1.6	Bogenlängen von Parameterkurven	21
1.7	3–dimensionale Kugelschichten	22
1.8	Archimedes Bestimmung des Kugelvolumens	25
1.9	Schwerpunkte und Guldinsche Regeln	27
1.10	Zu den Übungen, Blatt 1	28

Laenge V02A3

1.6 Bogenlängen von Parameterkurven

Wir behandeln hier noch einmal kurz Bogenlängen von C^1 -Kurven, genauer von Parameterkurven, also einer einmal stetig differenzierbaren Kurven im \mathbb{R}^n . Eine solche Kurve ist eine C^1 -Abbildung $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ und hat n Komponenten $f_j : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$, die C^1 -Funktionen sind:

$$f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t)).$$

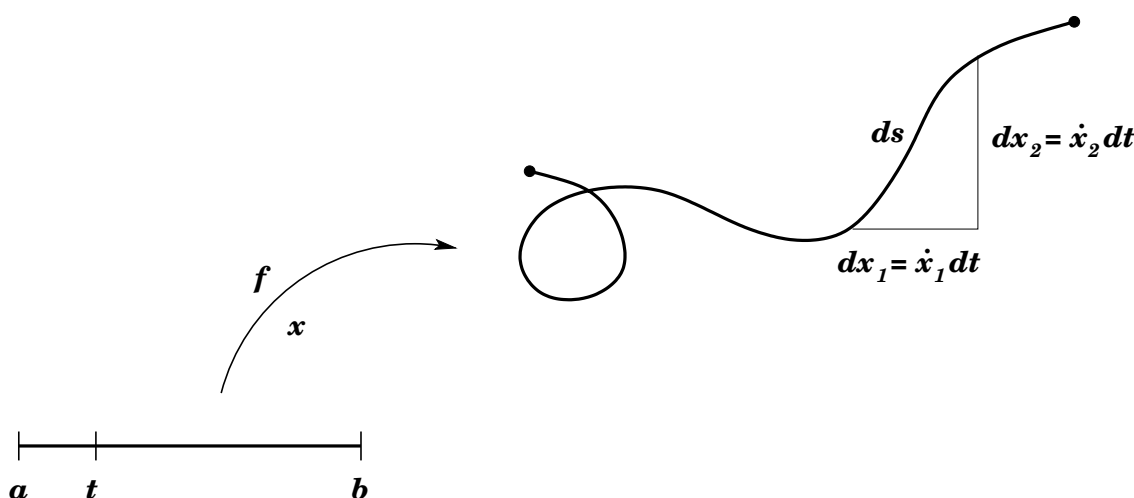
Die erste Ableitung nennt man **Tangentenvektor** oder **Geschwindigkeitsvektor**. Existiert die zweite Ableitung, so nennen wir diese **Beschleunigung**.

$$\dot{f}(t) = (\dot{f}_1(t), \dots, \dot{f}_n(t)), \quad \ddot{f}(t) = (\ddot{f}_1(t), \dots, \ddot{f}_n(t)).$$

Mit einem Punkt bezeichnen wir die Ableitung nach t . Den reellen Parameter t nennen wir **Zeit**

Wir definieren die Bogenlänge als

$$L = \mu_1(f) = \int_a^b \|\dot{f}(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{\dot{f}_1(t)^2 + \dots + \dot{f}_n(t)^2} dt.$$



Zu Bild 7: Geometrische Veranschaulichung des Bogenelementes ds , dessen Quadrat durch $ds^2 := dx_1^2 + \dots + dx_n^2$ gegeben ist.

Man nennt $ds, dx_1, \dots, dx_n, dt, \dots$ auch Differentiale. Man stellt sich darunter zunächst, ganz anschaulich, infinitesimal kleine (d.h. unendlich kleine) Stücke vor. Das ist mathematisch nicht präzise, hilft aber beim Verständnis. Mit diesen Größen kann man auch formal umgehen. Am Ende ergeben sich auf wundersame Weise brauchbare Formeln. Aufsummieren bedeutet Integrieren.

Man hat z.B. $L = \int_a^b ds$, was man als eine unendliche Summe über infinitesimal kleine Bogenelemente ds ansieht, womit, wie bekannt, ein gewisser Grenzwert gemeint ist.

Man verwendet häufig bei Parameterkurven die Schreibweise $x(t)$ anstatt $f(t)$, $x_i(t) := f_i(t)$ für die Komponenten von f . Dann ist $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) = f(t)$.

Beispiele für einige, oben angesprochene formale Rechnungen sind:

$$dx_j = \frac{dx_j}{dt} dt = \dot{x}_j dt$$

$$ds^2 = dx_1^2 + \dots + dx_n^2 = \dot{x}_1^2 dt^2 + \dots + \dot{x}_n^2 dt^2 = \|\dot{x}\|^2 dt^2$$

$$\dot{s}^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \|\dot{x}(t)\|^2 = \|\dot{f}(t)\|^2, \quad \dot{s}^2 = \dot{x}_1^2 + \dots + \dot{x}_n^2.$$

Die Kurve f nennt man eine reguläre C^1 -Kurve, wenn $\dot{f}(t) \neq 0$ für alle $t \in [a, b]$. In diesem Fall ist $t \mapsto \dot{s}(t) > 0$. Hier findet man auch eine differenzierbare Umkehrfunktion $s \mapsto t(s)$ und die Kurve läßt sich zu $s \mapsto x(t(s))$ umparametrisieren.

Wir bemerken: Bei der Definition der Bogenlänge als Integral braucht man lediglich Differenzierbarkeit und keine Regularitätsvoraussetzung, $\dot{f}(t) \neq 0$.

Bemerkung zu speziellen Kurven im \mathbb{R}^2 :

Jeder differenzierbaren Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Parameterkurve assoziiert

$$[a, b] \rightarrow [a, b] \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2, \quad \omega_f(x) := (x, f(x)).$$

Das Bild dieser Kurve ist der Graph von f

$$\text{Bild}(\omega_f) = \{(x, f(x)) \mid x \in [a, b]\} = \text{Graf}(f).$$

Nennen wir das **Schaubild** von f . Die Kurve $\omega = \omega_f$ hat als Bogenlänge

$$L(\omega_f) := \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Kugel V02A3

1.7 3-dimensionale Kugelschichten

Die **Vollkugel**

$$r D^3 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\}$$

vom Radius $r > 0$ und Mittelpunkt $(0, 0, 0)$ im \mathbb{R}^3 entsteht aus der Funktion $y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, $-r \leq x \leq r$, indem die dadurch gegebene Halbkreisfläche

$$\{(x, y, 0) \mid 0 \leq y \leq f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad -r \leq x \leq r\}$$

um die x Achse rotiert. Beschränkt man die Kugel $r D^3$ auf die Schicht $[a, b] \times \mathbb{R}^2$, wobei $-r \leq a \leq b \leq r$, so entsteht die **Kugelschicht**

$$M_{a,b} := \{(x, y, z) \mid y^2 + z^2 \leq f(x)^2 = r^2 - x^2, \quad a \leq x \leq b\} = r D^3 \cap ([a, b] \times \mathbb{R}^2)$$

Der Rand von der Vollkugel rD^3 ist die **2-Sphäre** rS^2 . Der Mantel $S_{a,b}$ von $M_{a,b}$ nennt man **Kugelzone**.

$$S_{a,b} = rS^2 \cap ([a, b] \times \mathbb{R}^2).$$

Wir interessieren uns für das Volumen von $M_{a,b}$ und den Flächeninhalt der Kugelzone $S_{a,b}$. Wir schreiben noch folgende Formeln auf:

$$\partial M_{a,b} = S_{a,b} \cup D_a \cup D_b, \quad S_{a,b} = \partial_{\text{Mantel}} M_{a,b}.$$

B. 9 Volumen einer Kugelschicht

Das Volumen der Kugelschicht $M_{a,b} \subset \mathbb{R}^3$ ergibt sich als

$$\mu_3(M_{a,b}) = \pi \int_a^b f(x)^2 dx = \pi \int_a^b (r^2 - x^2) dx = \frac{\pi}{3} (3(b-a)r^2 - b^3 + a^3)$$

Setzt man hier $a = -r$ und $b = r$, so ist $3(b-a) \cdot r^2 = 3 \cdot 2r \cdot r^2$ und $-b^3 + a^3 = -2 \cdot r^3$ und deshalb:

$$\mu_3(rD^3) = \mu_3(M_{-r,r}) = \frac{4\pi}{3} r^3.$$

Aufgabe 1.1 Die Kugelschicht $M_{a,b} := rD^3 \cap ([a, b] \times \mathbb{R}^2)$ hat zwei Radien ρ_a, ρ_b und eine Dicke (Höhe) h , die sich wie folgt ergeben:

$$h = b - a, \quad \rho_a = \sqrt{r^2 - a^2}, \quad \rho_b = \sqrt{r^2 - b^2}$$

Man drücke a, b, r durch h, ρ_a, ρ_b aus und schreibe damit das Volumen $\mu_3(M_{a,b})$ der Kugelschicht als Funktion von h, ρ_a, ρ_b .

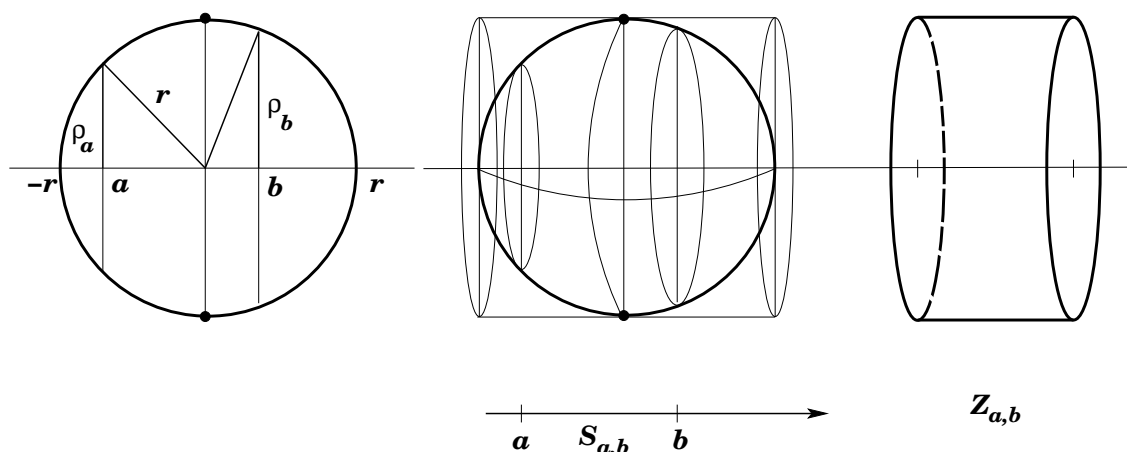


Bild 8 : Die Kugelschicht $M_{a,b}$, die Kugelzone $S_{a,b}$, der Zylindermantel $Z_{a,b}$, die Größen h, ρ_a, ρ_b .

B. 10 Mantelfläche einer Kugelschicht

Die Mantelfläche einer Kugelschicht nennen wir **Kugelzone**. Den Mantel von $M_{a,b}$ bezeichnen wir mit $S_{a,b}$. Den Flächeninhalt berechnet man nach der Formel

$$\mu_2(S_{a,b}) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

mit $f(x) := \sqrt{r^2 - x^2}$. Das ist ein uneigentliches Integral, wenn $a = -r$ oder $b = r$. f ist differenzierbar in $] -r, r[$ und dort ist $f'(x) = -x/\sqrt{r^2 - x^2}$. Also

$$f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2} = \sqrt{r^2 - x^2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} = r.$$

$$\mu_2(S_{a,b}) = 2\pi r(b - a).$$

Für die Kugeloberfläche vom Radius r hat man

$$\mu_2(rS^2) = \mu_2(S_{-r,r}) = 4\pi r^2.$$

Vergleicht man den Kugelzoneninhalte von $S_{a,b}$ mit dem Inhalt des Zylindermantels

$$Z_{a,b} = \{(x, y, z) \mid y^2 + z^2 = r^2, \quad a \leq x \leq b\},$$

so stellt man fest

$$\mu_2(Z_{a,b}) = 2\pi r(b - a) = \mu_2(S_{a,b}).$$

Diese Übereinstimmung ist sehr erstaunlich, äußerst überraschend und merkwürdig. Man denkt sich einen Zylinders mit der x -Achse als Achse, um die Sphäre herumgelegt.

$$S_{a,b} = ([a, b] \times \mathbb{R}^2) \cap rS^2 \quad \text{und} \quad Z_{a,b} = ([a, b] \times \mathbb{R}^2) \cap Z_{-r,r}$$

sind flächengleich.

Satz 1.1 *Kugelzonen $S_{a,b}$ auf rS^2 der Höhe $h = b - a$ und die Mantelfläche eines Kreiszyllinders vom Radius r und der Höhe h sind flächengleich und zwar ist ihr Inhalt $2\pi rh$. Speziell sind die Sphäre rS^2 vom Radius r und die Mantelfläche eines Kreiszyllinders vom Radius r und der Höhe $2r$ flächengleich und zwar mit Inhalt $4\pi r^2$.*

Cavalieri V02A3

Satz 1.2 *(Cavalieri Prinzip). Es seien $A, B \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$*

Für alle $t \in \mathbb{R}$ seien $A_t := A \cap \mathbb{R}^n \times \{t\}$, $B_t := B \cap \mathbb{R}^n \times \{t\}$ die Schnitte von A resp. B mit der Ebene $\mathbb{R}^n \times \{t\}$ und die mögen gleiches n -dimensionales Volumen besitzen. Es möge also $\mu_n(A_t) = \mu_n(B_t)$ sein. Dann sind die $(n + 1)$ -dimensionalen Volumen von A und B gleich.

$$\forall_{t \in [a,b]} \mu_n(A_t) = \mu_n(B_t) \Rightarrow \mu_{n+1}(A) = \mu_{n+1}(B).$$

Das gilt, wenn $t \mapsto \mu_n(t)$ eine integrierbare Funktion ist.

Beweis. Das Cavalieri Prinzip wird wie folgt in einer Zeile bewiesen:

$$\mu_{n+1}(A) = \int_a^b \mu_n(A_t) dt = \int_a^b \mu_n(B_t) dt = \mu_{n+1}(B).$$

Das ist ein Spezialfall des Satzes von Fubini.

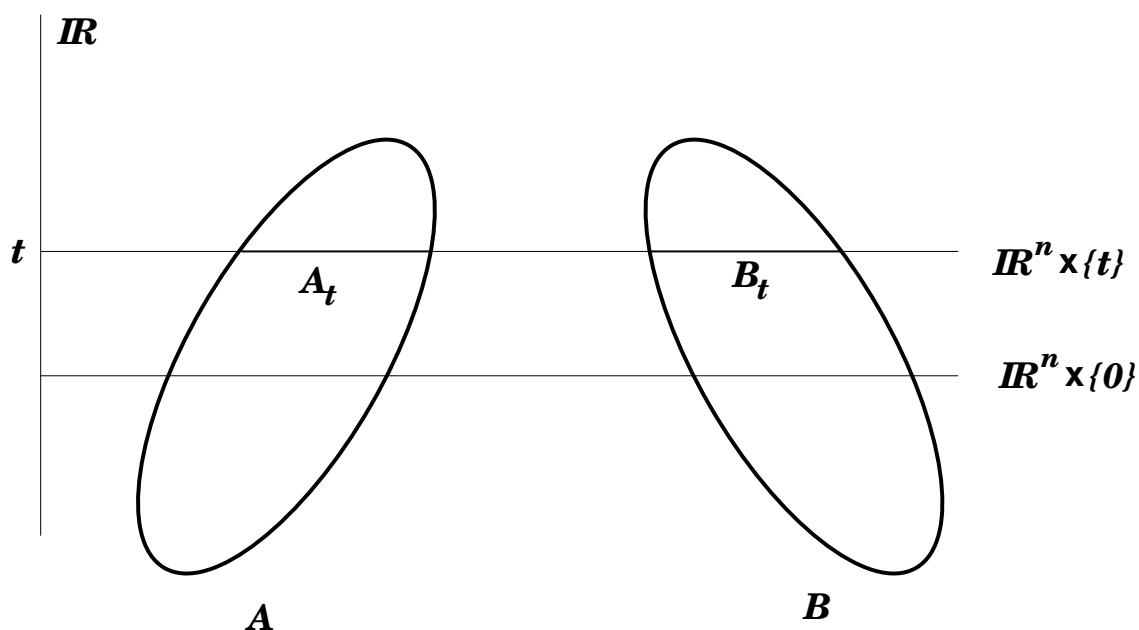


Bild 9 : Das Cavalierische Prinzip.

1.8 Archimedes Bestimmung des Kugelvolumens

Archimedes hat mit folgendem physikalischem Experiment das Kugelvolumen bestimmt.

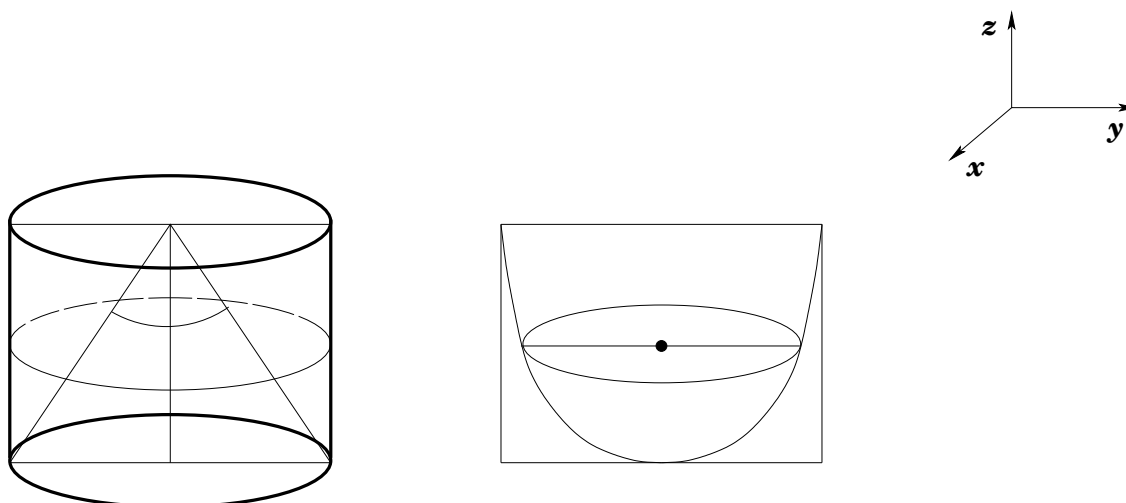


Bild 10 Veranschaulichung des Archimedischen Experimentes.

Zwei Gefäße stehen auf einem Tisch.

1. Das erste Gefäß A entsteht aus einem hohlen Kreiszyylinder vom Radius r und Höhe r , dahineingestellt ein Kreiskegel über der Grundfläche und der Höhe $h = r$. Von dem Kreiszyylinder wird dieser Kreiskegel entfernt. Der Rest ist das Gefäß A .

2. Das zweite Gefäß B ist eine Halbkugelschale vom Radius r , die nach oben offen ist.

Nun wird eines der beiden Gefäße mit Wasser gefüllt und dann in das zweite umgegossen, und die Wassermenge paßt genau in das zweite Gefäß. Also sind die Volumina beider Gefäße gleich.

So ergibt sich

Volumen der Halbkugel = Volumen des Zylinders minus Volumen des Kegel

$$= \pi r^2 \cdot r - \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot r = \frac{2\pi}{3} r^3.$$

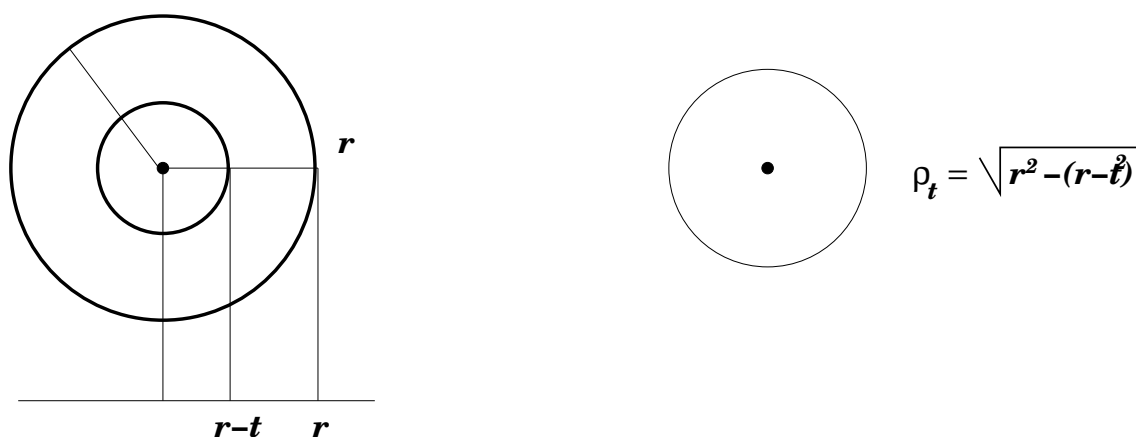


Bild 11 : Ebene Schnitte bei dem Archimedischen Experiment.

Schnitte mit Ebenen $\mathbb{R}^2 \times \{t\}$ durch die zwei Gefäße A, B .

A_t ist ein Kreisring mit Radien $r-t$ und r .

B_t ist ein Kreisfläche vom Radius $\rho_t = \sqrt{r^2 - (r-t)^2}$.

Wie sieht man dieses Experiment heute, aus dem Blickwinkel eines Mathematikers. Wir verwenden als Ersatz für die physikalischen Gegenstände Mengen:

Die beiden Gefäße entsprechen den Mengen $A, B \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$:

$$A := \{(x, y, z) \mid (r-t)^2 \leq x^2 + y^2 \leq r^2\}, \quad B := \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + (r-z)^2 \leq r^2\}.$$

Dem Tisch entspricht die Ebene $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$.

Schnitte mit Ebenen $\mathbb{R}^2 \times \{t\}$ durch die zwei Gefäße A, B :

A_t ist ein Kreisring mit Radien $r-t$ und r

B_t ist ein Kreisfläche vom Radius $\rho_t = \sqrt{r^2 - (r-t)^2}$.

$$\mu_3(A) = \mu_3(B) = 2\pi r^2 \cdot r - \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot r = \frac{2\pi}{3} r^3$$

Der mathematischer Beweis des Archimedischen Experimentes benutzt das Prinzip von Cavalieri.

1.9 Schwerpunkte und Guldinsche Regeln

Wir betrachten hier eine Funktion $f(x) \geq 0$ für $x \in [a, b]$, sagen wir, sie möge stetig (oder wenigstens stückweise stetig differenzierbar) sein. Die Fläche (als Menge) zwischen f und der x -Achse ist

$$G := \{(x, y) \mid a \leq x \leq b \quad 0 \leq y \leq f(x)\} \subset Q = [a, b] \times \mathbb{R}.$$

Die durch f gegebene Kurve ist $x \mapsto (x, f(x))$. Wir haben hier einen Flächen- und einen Kurven-schwerpunkt deren y -Koordinaten sich als

$$y_s \mu_2(G) = \int_G y dx dy = \int_a^b \int_0^{f(x)} y dy dx, \quad L y^* = \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

ergeben, wobei $L := \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}$ die Bogenlänge der Kurve ist. Die x -Koordinaten dieser Schwerpunkte sind analog definiert.

Satz 1.3 *Die Guldinsche Regel für Volumina. Das Volumen $\mu_3(\mathcal{R}_f)$ des durch f bestimmten Rotationskörpers*

$$\mathcal{R}_f := \{(x, y, z) \mid y^2 + z^2 \leq f(x)^2, \quad x \in [a, b]\} \subset \mathbb{R}^3$$

gilt

$$\mu_3(\mathcal{R}_f) = 2\pi y_s \mu_2(G).$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} 2\pi y_s \mu_2(G) &= 2\pi \int_G y dx dy = 2\pi \int_a^b \int_0^{f(x)} y dy dx \\ &= 2\pi \int_a^b \int_0^{f(x)} \frac{1}{2} y^2 \Big|_0^{f(x)} dx = \pi \int_a^b f(x)^2 dx = \mu_3(\mathcal{R}_f) \end{aligned}$$

Satz 1.4 *Die Guldinsche Regeln für Mantelflächen. Der Flächeninhalt des Mantels des Rotationskörpers \mathcal{R}_f ist*

$$\mu_2(\partial_{\text{Mantel}} \mathcal{R}_f) = 2\pi y^* L.$$

Beweis.

$$2\pi y^* L = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = \mu_2(\partial_{\text{Mantel}} \mathcal{R}_f).$$

$2\pi y_s$ ist die Weglänge des Flächenschwerpunktes bei Rotation um die x -Achse.

$\mu_2(G)$ ist der Inhalt der rotierten Fläche.

$2\pi y^*$ ist die Weglänge des Kurvenschwerpunktes bei Rotation um die x -Achse.

$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$ ist die Bogenlänge der rotierten Fläche.

1.10 Zu den Übungen, Blatt 1

Die Aufgaben von Blatt 1 stehen in Zusammenhang mit einer axiomatischen Charakterisierung eines Integrals, des Haarschen Maßes (eines Standardintegrals) auf \mathbb{R} (\mathbb{R}^n) wie am Anfang bei Forster 3. Die Axiome bringen wir weiter unten.

Bei einem Integral I hat man sich zunächst Funktionen f zu überlegen, auf denen diese definiert sind, also für die man $I(f)$ bilden kann. Also geht es zunächst um den Definitionsbereich V von I . Sie kennen solche Mengen (Vektorräume) V von Funktionen f . Zum Beispiel nimmt man Treppenfunktionen oder stetige Funktionen oder Riemann integrierbaren Funktionen oder Regelfunktionen u.s.w. Je nachdem, welche Mengen V von Funktionen f man betrachtet, bekommt man die entsprechenden Integralbegriffe. Diese sind trivialerweise verschieden voneinander, weil ihre Definitionsbereiche V verschieden sind. Solche Integrale haben auch spezielle Namen. Viele solcher Integrale, die auf stetige Funktionen f anwendbar sind, stimmen auch dort überein. Eines ist allen Integralen gemeinsam: Es geht letztendlich immer um lineare Abbildungen $I : V \rightarrow \mathbb{R}$ eines Vektorraumes V von Funktionen nach \mathbb{R} .

In Forster 3 besteht der Definitionsbereich V des Integrales I aus allen stetigen Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger. Das sind stetige Funktionen f die ausserhalb einer Kugel $B(0, r)$, ($r = r(f)$) verschwinden, also dort null sind. Diese bilden einen Vektorraum $V := C_c(\mathbb{R}^n)$ über \mathbb{R} .

Definition 1.1 *Ein Haarsches Integral (oder Maß) ist eine lineare Abbildung $I : C_c(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$, die (per Axiome) folgende Eigenschaften besitzt: Für $f, g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gelten:*

- (1) $I(\lambda f + \mu g) = \lambda I(f) + \mu I(g)$ (Linearität)
- (2) $f \leq g \Rightarrow I(f) \leq I(g)$ (Monotonie)
- (3) Für alle $a \in \mathbb{R}^n$ ist $I(\tau_a f) = I(f)$ (Translationsinvarianz).

Beachte: Zu jedem $a \in \mathbb{R}^n$ hat man eine Verschiebung, Translation $\tau_a : C_c(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_c(\mathbb{R}^n)$, $f \mapsto \tau_a f$, wobei $\tau_a f$ definiert ist als $(\tau_a f)(x) := f(x - a)$ für $x \in \mathbb{R}^n$.

Hierüber gilt folgender Satz:

Satz 1.5 *Es gibt ein von Null verschiedenes Haarsches Integral auf dem \mathbb{R}^n . Jedes andere ist ein reelles Vielfache dieses einen Integrals.*

Beweis:vgl. Forster 3.

Legt man I auf einer einzigen geeigneten Funktion ψ fest durch ein Normierungsaxiom, etwa durch $I(\psi) = 1$, so gibt es genau ein solches Haarsches Maß. \square

Beim Beweis der Eindeutigkeit betrachtet man Zackenfunktionen $\tau_a \psi_\epsilon$, die sich alle aus einer einzigen Zacke $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ergeben durch Stauchungen (oder auch Streckungen) mit einem $\epsilon > 0$ und Translationen mit $a \in \mathbb{R}^n$.

Formeln für $n = 1$:

$$\psi(x) := \max(1 - |x|, 0), \quad \psi_\epsilon(x) = \psi\left(\frac{x}{\epsilon}\right), \quad \tau_a \psi_\epsilon(x) = \psi\left(\frac{x-a}{\epsilon}\right).$$

In den Aufgaben von Blatt 1 beschränken wir uns auf $n = 1$. Das Ziel ist, aus der Kenntnis von $I(\psi) = 1$ (Normierungsaxiom) Axiom (4) und den weiteren Axiomen (1)-(3) für ein I , zu schließen, daß $I(\psi_\epsilon) = \epsilon$. Das erfordert lediglich, daß man zu jedem k Die Zacke $\psi_{k\epsilon}$ als endliche Linearkombination von Zacken $\tau_a \psi_\epsilon$ schreibt. Das alles sieht man sehr schön, geometrisch, anhand von Bildern.

Bemerkung: Für Dimension n setzt man

$$\psi(x_1, \dots, x_n) := \psi(x_1) \cdot \psi(x_2) \cdot \dots \cdot \psi(x_n)$$

Das ergibt $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, die wir auch mit ψ bezeichnen. wird. Es ist hier $\psi \in C_c(\mathbb{R}^n)$. Folgeschwere Verwechslungen sind dabei kaum zu befürchten. Diese Gleichbezeichnung ist sogar, obwohl sie fehlerhaft ist, sehr angenehm.

(4) (Normierungsaxiom): Bei $I : \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ normiert man ebenfalls durch $I(\psi) = 1$.