A08 VA08A3

Der Daniell Lebesgue Prozess

1. Einleitung
Es sei (S, L, I) ein Daniell Integral.
Wir schildern einen Prozess, wie man zu diesem ein Lebesgue Integral bekommt

$$(S, L, I) \mapsto (S, \mathcal{L}^1, I).$$

Ein solches Lebesgue Integral $(S, \mathcal{L}^1, I)$ ist (nach unseren Axiomen) wiederum ein Daniell Integral mit einer Vollständigkeitseigenschaft:

(A 3⁺): $f_n \uparrow f$, $f_n \in \mathcal{L}^1$, $f : S \to I\!R$, $\lim I f_n \in I\!R \Rightarrow f \in \mathcal{L}^1$ und $I f_n \uparrow I f$.

Um den Unterschied zu sehen, noch eine zu unserem Axiom 3 aus **V07A3** äquivalent Eigenschaft für ein Daniell Integral:

(A 3): $f_n \uparrow f$, $f_n, f \in L \Rightarrow I f_n \uparrow I f$.

• Wir erinnern, daß bei einem Daniell Integral eine L^1– Halbnorm $||f||_1 := I(|f|)$ für $f \in L$ definierbar ist. Beim zugeordneten Lebesgue Integral ergibt sich auch bezüglich dieser Halbnorm eine Vollständigkeitseigenschaft. Ferner liegt L dicht in $\mathcal{L}^1$ betüglich dieser Halbnorm.

Es sei ferner bemerkt, daß es bei Konstruktionen gewisse Schwierigkeiten gibt mit Konvergenzen von Funktionsfolgen $f_n : S \to I\!R$. Um diese zu meistern läßt man Funktionen $S \to \overline{I\!R}$ mit möglichen Werten $\pm\infty$ zu. Das wiederum verursacht Probleme mit der Arithmetik, also mit „±“und evtl. mit „· “

• Wir schließen uns bei der Definition von *integrierbar* genauer von *Lebesgue integrierbar* für $f : S \to \overline{I\!R}$ dem Buch [F3], S. 57 an.

([F3]=Forster, Analysis 3, 2. Auflage, vieweg, Braunschweig, 1983 an.)

$$f : S \to \overline{I\!R} \text{ integrierbar} :\Leftrightarrow I_* f = I^* f \in I\!R$$

Bei **[F3]** ist $S = I\!R^n$ $L = C_c(I\!R^n)$ und $I : C_c(I\!R^n) \to I\!R$ das Standard Integral, was auch das Haarsche Maß des $I\!R^n$ heißt.

$$I f := \int_{I\!R^n} f(x)\, d^n x.$$

Für den Daniell–Lebesgues Prozess spielen die speziellen $S = I\!R^n$ keine Rolle.

• Es gibt im Zusammenhang mit der Integriebarkeit in der Literatur noch die Begriffe *summierbare* Funktionen (vgl. Loomis, Kolmogorov/Fomin), *meßbare* Funktionen und *Bairesche* Funktion (vgl. Loomis, Bauer). Diese Worte stehen für unterschiedliche Begriffe. Bei Forster und bei uns spielen sie keine Rolle. Wir halten uns hier inhaltlich und methodisch an den Anfang des Buches von M. Leinert. Hier gibt es zwar einen ganz kleinen Unterschied beim Begriff eine Daniell Integrals aber das ist für die Theorie nicht so erheblich Die Standardbeispiele sind Daniell Integrale mit beiden Axiomensystemen.

B08 V08A3

2. $H^\uparrow$ bestehe aus den Funktionen von $\text{map}(S, I\!R \cup \infty)$, die sich als isotone punktweise Limiten von Funktionen aus L schreiben lassen.

$$H^\uparrow := \{f : S \to I\!R \cup \{\infty\} \mid \exists_{f_n \in L}\ f_n \uparrow f\}$$

Loomis verwendet U für $H^\uparrow$.

3. Wir erweitern $I : L \to I\!R$ zu $I^\uparrow : H^\uparrow \to I\!R \cup \{\infty\}$

$$I^\uparrow f := \lim_n I f_n.$$

Das folgende Lemma zeigt, daß diese Definition unabhängig ist von der Auswahl einer Folge $f_n \in L$ mit $f_n \uparrow f$.

Lemma 1. f_n, g_m zwei isotone Folgen aus L. Dann gilt:

$$\lim g_m \le \lim f_n \Rightarrow \lim_m I g_m \le \lim_n I f_n.$$

Beweis. Zunächst: Aus $\lim_n f_n \ge k \in L \Rightarrow \lim_n I f_n \ge I k$.

$$f_n \ge f_n \wedge k \uparrow k \Rightarrow I f_n \ge I(f_n \wedge k) \uparrow Ik \Rightarrow \lim_n I f_n \ge Ik.$$

Setze $k = g_m$; Dann ist $\lim_n f_n \ge \lim_j g_j \ge g_m =: k$ und somit $\lim_n I f_n \ge I g_m$. Das gilt für alle m.
Also folgt $\lim_n f_n \ge \lim_m I g_m$.

4. Die folgenden Eigenschaften sind offensichtlich erfüllt:

Lemma 2. (a) $L \subset H^\uparrow$.

Es seien $f, g \in H^\uparrow$ und $\lambda \ge 0$. Dann gilt:
(b) $f \le g \Rightarrow I^\uparrow f \le I^\uparrow g$.
(c) $f + g, \lambda f \in H^\uparrow$ und $I^\uparrow(f+g) = I^\uparrow f + I^\uparrow g$ und $I^\uparrow(\lambda f) = \lambda\, I^\uparrow f$.

Beweis. (a) Zu $f \in L$ betrachte die konstante Folge $f_n := f$ für alle $n \in I\!N$. Das zeigt $f_n \uparrow f$ also $f \in H^\uparrow$
(b) Folgt aus dem **Lemma 1** und der Definitioin von $I^\uparrow$.
(c) Man hat hier festzulegen $a + b := \infty$, falls a oder $b = \infty$ und $\lambda \cdot \infty := \infty$ für $\lambda > 0$ und $0 \cdot \infty := 0$ sonst.

5. Die nächste Eigenschaft ist eine Vollständigkeit für $H^\uparrow$ bezüglich isotoner Limiten.

Lemma 3. Falls $f_n \in H^\uparrow$ und $f_n \uparrow f \Rightarrow f \in H^\uparrow$ und $I^\uparrow f_n \uparrow I^\uparrow f$.

Beweis. Wähle $g_{n\nu} \in L$ mit $g_{n\nu} \uparrow_\nu f_n$

$$h_n := \max\{g_{k\nu} \mid 1 \le k, \nu \le n\}$$

$h_n \in L$ isotone Folge.
$g_{k\nu} \leq f_k \leq f_n$ für alle $k, \nu \leq n$. Das liefert liefert $h_n \leq f_n$.

$g_{j\nu} \leq h_\nu \leq f_\nu$ für $j \leq \nu$ liefert für $\nu \to \infty$ bei festem j:
$f_j = \lim_\nu g_{j\nu} \leq \lim_\nu h_\nu \leq \lim f_\nu = f$.
Läßt man jetzt noch $j \to \infty$ gehen, so ergibt sich:
$f \leq \lim_\nu h_\nu \leq f$. Also ist $f \in H^\uparrow$.

Nun zum Verhalten der Integrale: Es ist $I^\uparrow f = \lim_\nu I h_\nu$ nach Definition von $I^\uparrow f$.

Die Ungleichungen $h_\nu \leq f_\nu \leq f$ ergeben $I^\uparrow h_\nu \leq I^\uparrow f_\nu \leq I^\uparrow f$.
Weil $h_\nu \in L$ ist folgt: $I^\uparrow h_\nu = I h_\nu$.
Das ergibt: $If = \lim I h_\nu \leq \lim I^\uparrow f_\nu \leq I^\uparrow f$.
Also $\lim I^\uparrow f_\nu = I^\uparrow f$.

6. Die Funktionsmenge $H^\downarrow$ und ihr Integral $I^\downarrow$ sind wie folgt vereinbart:

$$H^\downarrow := -H^\uparrow \subset \operatorname{map}(S, I\!R \cup \{-\infty\}) \quad \text{und} \quad I^\downarrow(f) := -I^\uparrow(-f) \quad \text{für} \quad f \in H^\downarrow.$$

Es ist $I^\downarrow : H^\downarrow \to I\!R \cup \{-\infty\}$.

Lemma 4. Wenn $\varphi \in H^\downarrow \cap H^\uparrow \Rightarrow I^\downarrow \varphi = I^\uparrow \varphi$.

Beweis. Wir haben $-\varphi, \varphi \in H^\uparrow$.
Deshalb gilt $\varphi : S \to I\!R$ und $\varphi + (-\varphi) : S \to I\!R$ ist definiert und in $H^\uparrow$
Ferner ist $-\infty < I^\uparrow \varphi,\ I^\uparrow(-\varphi)$.
Aus $0 = \varphi + (-\varphi) \in H^\uparrow$ ergibt sich $0 = I^\uparrow 0 = I^\uparrow \varphi + I^\uparrow(-\varphi)$.
Integral $I^\uparrow \varphi,\ I^\uparrow(-\varphi) \in I\!R$.

$$I^\uparrow \varphi = -I^\uparrow(-\varphi) = I^\downarrow \varphi$$

7. Vereinbarung
Wir bezeichnen ab jetzt $I^\uparrow$ und $I^\downarrow$ wiederum mit I, wie das Ausgangsintegral $L \to I\!R$.
So ergibt sich jetzt

$$\boxed{I : H^\downarrow \cup H^\uparrow \to \overline{I\!R}}$$

wobei $I(H^\downarrow) \subset I\!R \cup \{-\infty\}$ und $I(H^\uparrow) \subset I\!R \cup \{\infty\}$.
Wichtig dabei ist, daß auf dem Durchschnitt $H^\downarrow \cap H^\uparrow$ die Erweiterungen $I^\downarrow$ und $I^\uparrow$ den gleichen Wert liefern nach Lemma 3.

• Wir wollen uns jetzt von der Isotonie von dieser Erweiterten I überzeugen. Also von

$$f, g \in H^\downarrow \cup H^\uparrow \to \overline{I\!R} \text{ und } f \leq g \Rightarrow If \leq Ig.$$

Hier hat man 4 Fälle zu unterscheiden:

(1) $f \in H^\downarrow,\ g \in H^\downarrow \Rightarrow I^\downarrow f \leq I^\downarrow g$.

(2) $f \in H^\downarrow,\ g \in H^\uparrow \Rightarrow I^\downarrow f \leq I^\uparrow g$.

(3) $f \in H^{\uparrow},\ g \in H^{\downarrow} \Rightarrow f \in I^{\uparrow} f \leq I^{\downarrow}$.

(4) $f \in H^{\uparrow},\ g \in H^{\uparrow} \Rightarrow I^{\uparrow} f \leq I^{\uparrow}$.

• Die Fälle (1), (4) sind leicht auf die Monotonie von $I^{\uparrow}$ zurückzuführen, was man mit der Definition von $I^{\uparrow}$ und dem **Lemma 1** einsieht. vgl. **Lemma 3.**

Zu (2) Hier ist $0 \leq g + (-f) \in H^{\uparrow}$.

$0 \leq I^{\uparrow}(g + (-f)) = I^{\uparrow} g + I^{\uparrow}(-f)$

$-I^{\uparrow}(-f) \leq I^{\uparrow} g$.

Zu (3) Hier gibt es zwei Folgen $f_n, g_n \in L$ mit $f_n \uparrow f$, $g_n \downarrow g$.
Man hat hier $f_n \leq f \leq g \leq g_n$ und somit $If_n \leq Ig_n$. Die Monotonie des Limes ergibt $I^{\uparrow} f = \lim If_n \leq \lim Ig_n = I^{\downarrow} g$

8. Oberintegral, Unterintegral, Lebesgue Integral
Zu $f : S \to \overline{I\!R}$ definieren wir das Unterintegral $I_* f$ resp. Oberintegral $I^* f$:

$$I_* f := \sup\{I\varphi \mid \varphi \in H^{\downarrow},\ \varphi \leq f\} \in \overline{I\!R} \qquad I^* f := \inf\{I\psi \mid \psi \in H^{\uparrow},\ f \leq \psi\} \in \overline{I\!R}.$$

• Die Funktionen konstant $= \pm\infty$ liefern Werte $\pm\infty$ für I_* und I^*.
Wenn es zu f kein entsprechendes ψ gibt, so wird $I^* f := \infty$ gesetzt.
Analog beim Unterintegral ist $I_* f := -\infty$ zu vereinbaren, wenn es kein φ gibt.

$$I_* f \leq I^* f.$$

• Oberintegral und Unterintegral sind für alle $f \in \mathrm{map}(S, \overline{I\!R})$ definiert und ergeben zwei Abbildungen

$$I_*, I^* : \mathrm{map}(S, \overline{I\!R}) \to \overline{I\!R}.$$

• Das Unterintegral ist auf das Oberintegral zurückführbar:

$$I_* f = -I^*(-f),$$

• Die Monotonie von $I : H^{\downarrow} \cup H^{\uparrow} \to \overline{I\!R}$ ergibt: $I_* f \leq I^* f$, denn aus $\varphi \leq f \leq \psi$ mit $\varphi \in H^{\downarrow}$ und $\psi \in H^{\uparrow}$ ergibt $I\varphi \leq I\psi$
• Man nennt $f : S \to \overline{I\!R}$ *integrierbar* oder *Lebesgue integrierbar:* $\Leftrightarrow I_* f = I^* f \in I\!R$.
Der gemeinsame Wert von Ober– und Unter–Integral nennen wir Integral, das wir mit $\int f$ oder mit If bezeichnen.

$$\boxed{\int f := If := I_* f = I^* f \in I\!R}$$

Für die Existenz von Grenzfunktionen benötigt man Funktionen $f : S \to \overline{I\!R}$, obwohl man im Prinzip nur an Funktionen mit Werten in $I\!R$ intressiert ist.
Man kann alternativ die Punkte $x \in S$ entfernen, für die $f(x) = \pm\infty$. Das bringt eine andere technische Schwierigkeit, nämlich, daß Funktionen nicht einheitlich auf S definiert sind.

9. Definition von $\mathcal{L}^1$
Die integrierbaren $f : S \to I\!R$ bilden einen Vektorraum, den wir mit $\mathcal{L}^1$ bezeichnen.

$$\mathcal{L}^1 := \{f \mid f : S \to I\!R, \quad f \text{ integrierbar}\}.$$

Es ist $L \subset \mathcal{L}^1$. Das Integral I für $\mathcal{L}^1$ erweist sich als eine lineare Abbildung

$$I : \mathcal{L}^1 \to I\!R.$$

Es erweitert das urspünglich auf L definiert $I : L \to I\!R$.

Wir haben damit einem Daniell Integral (S, L, I) eine neues zugeordnet $(S, \mathcal{L}^1, I)$, wie wir gleich sehen.

$$(S, L, I) \mapsto (S, \mathcal{L}^1, I).$$

Dieses ist in einer bestimmten Weise vollständig, was für das ursprüngliche Integral (S, L, I) noch nicht zutreffend ist. Es ist eine (delikate) Vollständigkeit bezüglich der Pseudonorm $||f||_1 := I^*|f|$. Diese liefert eine Halbnorm auf $\mathcal{L}^1$.

Eine **Pseudonorm** darf ∞ als Wert haben und sie braucht nicht definit zu sein.
Eine **Halbnorm** hat nur Werte in $I\!R_+$, braucht aber nicht definit zu sein.
Ansonsten erfüllen beide die Axiome einer Norm.
Definitionsbereiche von Normen, Halbnormen sind Vektorräume über $I\!R$ resp. über $\mathbb{C}$.
Unsere Pseudonormen ist auf einer Menge von Funktionen definiert.
C08 V08A3

10. Eigenschaften des Lebesgue Integrals
Oberintegral und Unterintegral haben folgende Eigenschaten:

Lemma 5. Für $f, g, f_n : S \to \overline{I\!R}$, $\lambda \geq 0$ gilt
(a) $I^*f \leq I^*g$ und $I_*f \leq I_*g$.
(b) $I^*(\lambda f) = \lambda I^*f$ und $I_*(\lambda f) = \lambda I_*f$.
(c) $I^*(f + g) \leq I^*f + I^*g$,
für $f, g : S \to I\!R$, wenn immer beide Seiten existieren. d.h. wenn I^*f, I^*g beide nicht gegenseitig $\pm\infty$ sind und entsprechnd, wenn $f(x)$ und $g(x)$ nicht gegenseitig unendlich sind für alle $x \in S$, damit $I^*f + I^*g$ und $f + g$ definierbar sind.
Analog gilt $I_*(f + g) \geq I_*f + I_*g$.

(d) Wenn $u_j : S \to \overline{I\!R}$, $j = 1, 2, \ldots$ und $u_j \geq 0 \Rightarrow I^* \sum u_j \leq \sum I^*u_j$.

Beweis (d): Wenn $Iu_j = \infty$ für ein j, dann ist die Ungleichung trivial.
Nun seien alle $I^*u_j < \infty$.
Geben wir uns ein $\epsilon > 0$ vor.
Dann findet man $\psi_j \in H^\uparrow$ mit $u_j \leq \psi_j$ und $I^*u_j + \epsilon 2^{-j} \leq I\psi_j$
Es ist $\sum_j u_j \leq \sum_j \psi_j \in H^\uparrow$. und

$$I^* \sum_j u_j \leq I \sum_j \psi_j \leq \sum_j (I^*u_j + \epsilon 2^{-j}) = \sum_j I^*u_j + \epsilon.$$

Weil diese Ungleichung auch für jedes $\epsilon > 0$ gilt, hat man sie auch für $\epsilon = 0$, wie gewünscht.

Das Skript für **V08A3** ist hier noch nicht zu Ende.
Es geht weiter mit dem

Satz: $(S, \mathcal{L}^1, I)$ ist ein Daniell Integral, zusätzlich mit einer gewissen Vollständigkeitseigenschaft.

Lemma. $f, g : S \to \overline{R}$ und $f + g : S \to \overline{I\!R}$ definiert $\Rightarrow f + g$ integrierbar und $I(f+g) = If + Ig$.

Beweis. $f + g$ definiert bedeutet, daß für jedes $x \in S$ $f(x)$, $g(x)$ nicht beide gegenseitig $\pm\infty$ sind. Nun ergibt sich

$$I^*(f+g) \leq I^*f + I^*g = If + Ig = I_*f + I_g* \leq gI_*(f+g).$$

Die andere Ungleichung, $I_*(f+g) \leq I^*(f+g)$, ist klar.

Lemma. $f : S \to \overline{I\!R}$ integrierbar $\Rightarrow f_+ := f \vee 0$ integrierbar.

Beweis. Geben wir uns ein $\epsilon > 0$ vor.
$\exists_{\varphi,\psi}\ \varphi \in H^\downarrow,\ \psi \in H^\uparrow$ mit $\varphi \leq f \leq \psi$, $I\varphi, I\psi \in I\!R$ und $0 \leq I\psi - I\varphi \leq 0$.

$$\varphi_+ \leq f_+ \leq \psi_+, \quad \varphi_+ \in H^\downarrow,\ \psi_+ \in H^\uparrow, I\varphi_+ \leq I\psi_+.$$

Begründen wir $I\psi_+ \in I\!R$:
Das geht wie folgt: $\psi \in H^\uparrow \Rightarrow \exists_{h_n \in L} h_n \uparrow \psi$.
Es gilt $0 \leq \psi_+ - h_{n+} \leq \psi - h_n$; auch wenn $\infty \in \psi(S)$.
Speziell für $n = 1$ folgt: $\psi_+ \leq \psi + h_{1+} - h_1$ und somit: $I\psi_+ \leq I\psi + I(h_{1+} - h_1)$. (Beachte: $h_{1+} - h_1 \in L$.)

Begründen wir $I\varphi_+ \in I\!R$: Beachte $\varphi, \varphi_+ \in H^\downarrow \Rightarrow I\varphi, I\varphi_+ < \infty$.
$\varphi \leq \varphi_+ \Rightarrow I\varphi \leq I\varphi_+ < \infty,$.
Weil $I\varphi \in I\!R$ ist, folgt $I\varphi_+ \in I\!R$.

Wir haben $0 \leq \psi_+ - \varphi_+ \leq \psi - \varphi$
(auch falls der Werte ∞ angenommen wirden von ψ und $-\varphi$
Es folgt $I\psi_+ - I\varphi_+ \leq I\varphi - I\psi$.
Das zeigt, daß f_+ integrierbar.

Korollar. $f : S \to \overline{I\!R}$ integrierbar $\Rightarrow |f|$ integrierbar.

Beweis. Es sind f_+ und $f_- := (-f) \vee 0 = (-f)_+$ integrierbar. Ferner ist

$$|f| = f_+ + f_-, \quad f = f_+ - f_-,$$

denn f_+, f_- sind nie gegenseitig $\pm\infty$. Wenn f integrierbar, dann auch $-f$ und somit f_+, f_- und somit auch $|f| = f_+ + f_-$.
(vgl. [F3], S. 59).

Der folgende Satz beinhaltet eine Vollständigkeitseigenschaft für $\mathcal{L}^1$:

Satz. Es seien $f_\nu \uparrow f$, wobei $f_\nu : S \to I\!\!R$ integrierbar, also $f_\nu \in \mathcal{L}^1$ und $f : S \to \overline{I\!\!R}$. Ist ferner $\lim_\nu f_\nu(x) < \infty$, dann ist auch f integrierbar und $If = \lim_\nu f_\nu$.

Korollar. Wenn die Grenzfunktion f der isotonen Funktionsfolge $f_\nu \in \mathcal{L}^1$ nur endliche Werte annimmt und $\lim_\nu f_\nu(x) < \infty$, dann ist $f \in \mathcal{L}^1$ und das Integral If ist Grenzwert der Intergrale If_ν.

Beweis. Wir können f schreiben als

$$f = f_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(-f_{k-1} + f_k) = f_0 + \sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

wobei $u_k = f_k - f_{k-1} \in \mathcal{L}^1$ und $u_k \geq 0$ für $k =\in I\!\!N$ Nun gilt $f_n - f_0 = \sum_{k=1}^{n} u_k$, und somit konvereiert die Reihe der Iu_n gegen $\lim_n If_n - If_0 \in I\!\!R$

$$I^*(f - f_0) = I^* \sum_{k=1}^{\infty} u_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} I^* u_k = \sum_{k=1}^{\infty} Iu_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} u_k \leq f - f_0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} Iu_k = I \sum_{k=1}^{n} u_k \leq I_* \sum_{k=1}^{n} u_k \leq I_*(f - f_0).$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} Iu_k \leq I_*(f - f_0)$$

Es ergibt sich:

$$I_*(f - f_0) = \sum_{k=1}^{\infty} Iu_k = I^*(f - f_0)$$

Also ist $f - f_0$ integrierbar. Weil f_0 nur endliche Werte annimmt, kann man f schreiben als $f_0 + (f - f_0)$, und somit ist f integrierbar und $If = If_0 + \lim_n(If_n - If_0) = \lim_n If_n$.

ovR08 V08A3

Die Erweiterung $\overline{I\!\!R}$ von $I\!\!R$

Als Menge ist $\overline{I\!\!R}$ lediglich $I\!\!R \cup \{\pm\infty\}$.

Dann erweitert man gewisse Strukturen von $I\!\!R$ auf $\overline{R}$.
Anordnung, und die Grenzwerte (Limiten), die Addition und die Multiplikation.

In $\overline{I\!\!R}$ wird addiert mit $\pm\infty$ nach den Regeln:

$a + \infty := \infty + a := \infty$ für $-\infty < a \leq \infty$

$b - \infty := -\infty + b := -\infty$ für $-\infty \leq b < \infty$.

Nicht definiert sind $-\infty + \infty$ und $\infty - \infty$, also eine Summe mit gegenseitig $\pm\infty$ als Summanden. Die Vereinbarungen von Addition mit $\pm\infty$ sind so, daß sie mit Grenzwertbilden in $\overline{I\!\!R}$ verträglich wird. Also eine stetige Abbildung $\overline{I\!\!R} \times \overline{I\!\!R} \subset D \xrightarrow{+} \overline{I\!\!R}$ ergibt, wobei D bis auf $\pm(\infty, -\infty)$ ganz $\overline{I\!\!R} \times \overline{I\!\!R}$ ist.

Nun zur Multiplikation $a \cdot b$ Hier ist das ebenfalls stetig erweiterbar für fast alle $(a, b) \in \overline{I\!R} \times \overline{I\!R}$, bis auf die vier Fälle $(a, b) = (0, \pm\infty)$ resp. $(\pm\infty, 0)$.
In der Integrationstheorie wird hier trotzdem folgende Vereinbarung getroffen:

$$0 \cdot (\pm\infty) := 0 =: (\pm\infty) \cdot 0.$$

Das erstaunt, denn diese Verabredung ist nicht mit Grenzwertbilden in $\overline{I\!R}$ verträglich.