Finanzmathematik

Johannes Bartels *

8. April 2024

*Der Verfasser ist Oberregierungsrat bei der BaFin. Das vorliegende Skript gibt ausschließlich seine persönliche Meinung wieder. J. Bartels, Bonn, E-Mail: bartels@mathi.uni-heidelberg.de

1 Einführung

Das vorliegende Skript dokumentiert eine im Sommersemester 2019 an der Fakultät für Mathematik und Informatik der Universität Heidelberg gehaltene Blockvorlesung. Diese wurde an fünf aufeinander folgenden Tagen je 3 Std. pro Tag gehalten.

Es ist nicht erklärtes Ziel, Neuland zu betreten oder einen besonders originellen Zugang zum Thema Finanzmathematik darzustellen. Alleiniger Zweck der Vorlesung ist es, möglichst zügig ein paar grundlegende Sachverhalte klarzumachen und dabei nicht auf mathematische Präzision zu verzichten. Ausgespart wurden Kreditrisikomodelle, Risikomaße, Zinskurvenmodelle uvm. Kern der Vorlesung sind Derivate und deren Preise. Aus Zeitgründen wird hierbei auf zeitstetige Modelle verzichtet, sondern allein auf diskrete Modelle zurückgegriffen.

Im zweiten Kapitel geht es darum, Terminverträge und Optionen kennenzulernen. Für Terminverträge ist die Preisfindung einfach und unmittelbar zugänglich. Schwieriger ist es bei Optionspreisen: obwohl sie per Put-Call-Parität unmittelbar untereinander in Zusammenhang gebracht werden können, können die Preise nicht ohne Weiteres ad hoc bestimmt werden.

Das dritte Kapitel nähert sich in einem ersten Schritt der Berechnung von Optionspreisen. Hierbei wird die einfachste Art, dieser Frage nachzugehen, gewählt: das einperiodische Modell, welches nur zwei Zeitpunkte zugrunde legt.

Im vierten Kapitel werden auf Grundlage des mehrperiodischen Modells die Existenz und die Eindeutigkeit eines arbitragefreien (Options-)Preises auf das Vorhandensein eines risikoneutralen Maßes und die Replizierbarkeit der Option zurückgeführt.

Abschließend wird im letzten Kapitel der Grenzübergang des mehrperiodischen Binomialmodells hin zum zeitstetigen Modell genutzt, um den Black-Scholes-Preis einer europäischen Kauf- bzw. Verkaufsoption zu ermitteln.

Grundlage für die einzelnen Kapitel waren sowohl die Lehrbücher von Föllmer/Schied [Fö11] (3. und 4. Kapitel) und von Lamberton/Lapeyre [Lam12] (4. Kapitel) als auch die Skripten von Frey/Schmidt [Fre09] (2. und 5. Kapitel) und v. Renesse [v. 13] (3., 4. und 5. Kapitel).

2 Grundlagen

2.1 Themen

Fragestellungen der Finanzmathematik sind

- Bewertung und Absicherung von Derivaten
- Portfoliooptimierung - wie verwaltet man bestmöglich die einem Portfolio inhärenten Gefahren?

Diese sind eng verbunden mit folgenden Bereichen

- Risikomanagement
- Finanzmarktstatistik
- Ökonomie der Finanzmärkte
- Versicherungsmathematik
- ...

2.2 Zinsen

2.2.1 Zinsen und Nullkuponanleihen

2.2.1.1 Definition: *Es sei $t < T$. Eine **Nullkuponanleihe** $B(t,T)$ (engl. zerobond) gibt den heutigen (d.h. zur Zeit t) Preis einer Geldeinheit in T an, $B(t,T)$ wird auch als **Diskontfaktor** bezeichnet.*

2.2.1.2 Bemerkung: Der Preis $B(t,T)$ hat die Eigenschaften

1. Bei positiven Zinssätzen gilt $B(t,T) \leq 1$.
2. Es gibt kein Konkursrisiko (default risk), d.h. $B(T,T) = 1$.

2.2.1.3 Bemerkung: Die meisten handelbaren Anleihen lassen sich als Linearkombination von Nullkuponanleihen darstellen. Statt Preisen für Nullkuponanleihen werden auch häufig Zinsen angegeben. Hierbei nutzt man mehrere Methoden:

1. **Diskrete Verzinsung**:
   - jährliche Verzinsung - Sei $T \in \mathbb{N}$, dann ist der zur Nullkuponanleihe $B(0,T)$ zugehörige Zinssatz r_c durch die Gleichung
     $$B(0,T) = \left(\frac{1}{1+r_c}\right)^T \text{ bestimmt.}$$
     Hierbei ist der Satz r_c von der Zeit T abhängig.

- unterjährige Verzinsung - Sei zusätzlich $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Nun ist der zugehörige Zinssatz $r_{c,n}$ durch
$$B(0,T) = \left(\frac{1}{1+\frac{r_{c,n}}{n}}\right)^{nT} \text{ gegeben.}$$
- LIBOR-Zins (London Interbank Offered Rate) - Hierbei handelt es sich um einen Spezialfall, da besonders kurze Laufzeiten $\alpha = \frac{1}{n}$ die Regel sind (d.h. $n = 2, 4, ...$ Der LIBOR-Zins ist durch
$$B(0,T) = \frac{1}{1+\alpha L(0,\alpha)} \text{ definiert.}$$

2. **Stetige Verzinsung**:
Der Zinssatz $y(0,T)$ der stetigen Verzinsung wird anhand der Gleichung
$$B(0,T) = e^{-Ty(0,T)} \text{ ermittelt.}$$
Wegen des Grenzwerts
$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n = e^x$$
erklärt sich die Wahl von $y(0,T)$ durch Grenzübergang der unterjährigen Zinssätze $r_{c,n}$.

2.3 Derivate

2.3.1 Terminverträge

2.3.1.1 Definition: *Unter einem **Terminvertrag** (engl. forward contract/agreement) versteht man eine zum Zeitpunkt t eingegangene Verpflichtung,*

- *ein Gut G, welches **underlying** genannt wird und derzeit G_t kostet,*
- *zu einem Zeitpunkt T in der Zukunft, dem sog. **Fälligkeitszeitpunkt**, (d.h. $t < T$) und*
- *zu einem bereits in t festgelegten **Basispreis** K*

*zu erwerben. Handelt es sich um einen börsengehandelten (i.d.R. normierten) Terminvertrag, spricht man von einem **future contract**.*

2.3.1.2 Bemerkung: In der Regel wird der Basispreis K so bestimmt, daß das Eingehen der Verpflichtung zur Zeit t kostenlos ist. In diesem Fall nennt man den Basispreis auch ***Terminpreis***, der mit $F^G(t,T)$ bezeichnet wird.

2.3.1.3 Bemerkung: In der Praxis werden solche Verträge auf Güter wie Wertpapiere (d.h. Schuldscheine, Anleihen, Aktien, Verbriefungen, usw.), Devisen, aber auch Rohstoffe wie Edelmetalle, Rohöl oder Strom abgeschlossen. Man versucht oft, sich mit solchen Verträgen gegen ungünstige Entwicklungen auf den Märkten zu wappnen. Ein weiterer Zweck ist die Spekulation auf die Preisentwicklung dieser Güter.

2.3.1.4 Definition: *Der Käufer eines (Termin-)Vertrags geht in dieser Position* ***long****, während der Verkäufer* ***short*** *geht. Der Preis G_t des Gutes zur Zeit t wird auch* ***Spot-Preis*** *genannt.*

2.3.1.5 Bemerkung: Zur Zeit T ist der Wert des Terminvertrags für den Käufer dann $G_T - K$, während er für den Verkäufer $-(G_T - K)$ ist.

2.3.2 Arbitrage - vorläufige Definition

Ein Markt enthält Gelegenheiten zur ***Arbitrage***, wenn aus dem Nichts Geld geschaffen werden kann, d.h. wenn zum Zeitpunkt t ein Vermögen V_t mit Wert 0 durch geschicktes Handeln (also short und long gehen) in Zukunft, z.B. zum Zeitpunkt T mit $t < T$ mit Sicherheit größer als 0 ist: $V_T > 0$. Gibt es in einem Markt keine solche Möglichkeiten, spricht man von einem ***arbitragefreien*** Markt. Anders als im Märchen geht man also davon aus, daß aus Stroh kein Gold gesponnen werden kann.

2.3.2.1 Bemerkung: Analog gilt dann auch, daß ein positives Vermögen $V_t > 0$ zum Zeitpunkt t nicht mit Sicherheit zu null werden kann: $V_T = 0$.

2.3.3 Bewertung von Terminverträgen

Terminverträge auf Wertpapiere

Im Fall eines gehandelten Wertpapiers G ist der Preis des zugehörigen Terminvertrags leicht ermittelbar. Zentrales Argument ist hier stets die Arbitragefreiheit des Markts, von der implizit ausgegangen wird.

2.3.3.1 Hilfssatz: *Ist S_t der Preis eines zu Spekulationszwecken gehandelten Wertpapiers S, welches binnen des Zeitraums $[t, T]$ keine Dividenden oder Zinsen abwirft, so ist in einem arbitragefreien Markt der Preis des Terminvertrags auf S mit Fälligkeit T und Basispreis K durch $S_t - B(t,T)K$ gegeben. Insbesondere gilt für den Terminpreis*

$$F^S(t,T) = \frac{S_t}{B(t,T)}.$$

Beweis. Angenommen, man kauft eine Einheit von S, verkauft K Nullkuponanleihen und gehe short im o.g. Terminvertrag zum Preis von x. Dann sind die Werte der einzelnen Positionen in t und T in folgender Tabelle festgehalten:

Position	Wert in t	Wert in T
eine Einheit von S long	S_t	S_T
K Nullkuponanleihen short	$-KB(t,T)$	$-K$
Terminvertrag short	$-x$	$-(S_T - K)$
gesamtes Portfolio	$S_t - KB(t,T) - x$	0

Wegen der Arbitragefreiheit gilt die Gleichung

$$S_t - KB(t,T) - x = 0$$

und somit beträgt der Preis für den Vertrag

$$S_t - KB(t,T).$$

Dieser ist null für den Terminpreis

$$F^S(t,T) = \frac{S_t}{B(t,T)}.$$

◇

Terminverträge auf Devisen

2.3.3.2 Bezeichnung: Es sei

- e_t, (e_T) der Wechselkurs zum Zeitpunkt t (bzw. T) zu einer fremden Währung (d.h. Anzahl € pro Einheit in ausländischer/fremder Währung),
- $B^d(t,T)$ der Preis einer dt. Nullkuponanleihe und
- $B^f(t,T)$ der Preis einer ausländischen Nullkuponanleihe.

2.3.3.3 Hilfssatz: *In einem arbitragefreien Markt ist der Terminpreis der ausländischen Währung durch*

$$F^e(t,T) = e_t \frac{B^f(t,T)}{B^d(t,T)} \text{ gegeben.}$$

2.3.3.4 Bezeichnung: Die obige Gleichung nennt man ***gedeckte Zinsparität***.

Beweis. Wieder stellt man sich ein geeignetes Portfolio zusammen, bestehend aus dem Erwerb einer fremden Nullkuponanleihe, einer Kreditaufnahme in Höhe des hierfür notwendigen Betrags (d.h. verkaufe entsprechend einheimische Nullkuponanleihen) und schließlich die Veräußerung eines Terminvertrags zum Basispreis $K = F^e(t,T)$. Eine Tabelle zeigt wieder die Werte des Portfolios zu den Zeiten t und T:

Position	Wert in t	Wert in T
Kauf einer Anleihe in Fremdwährung (long)	$e_t B^f(t,T)$	e_T
Verkauf von dt. Nullkuponanleihen (short)	$-e_t B^f(t,T)$	$-e_t \frac{B^f(t,T)}{B^d(t,T)}$
Verkauf eines Terminvertrags (short)	0	$-(e_T - F^e(t,T))$
Portfolio in toto	0	$F^e(t,T) - e_t \frac{B^f(t,T)}{B^d(t,T)}$

Da aus Nichts nicht sicher Geld erhalten werden kann, gilt

$$F^e(t,T) = e_t \frac{B^f(t,T)}{B^d(t,T)}.$$

◇

Terminverträge auf Güter

Unter Gütern können Edelmetalle, Rohstoffe usw. verstanden werden. Folgende Rahmenbedingungen liefern einen Unterschied zu obigen Terminverträgen:

- Es sind - möglicherweise beträchtliche - Lagerkosten vorhanden.
- Die Güter werden weniger für Spekulationen als für die Produktion erworben.

2.3.3.5 Beispiel (BASF)**:**

Ist L der Preis, das Gut G über den Zeitraum $[t,T]$ zu lagern, so gilt für den Spotpreis

$$F^G(t,T) \leq \frac{G_t + L}{B(t,T)}.$$

Dies erhält man durch dasselbe Argument wie in 2.3.3.1. Gälte das Umgekehrte, also

$$F^G(t,T) > \frac{G_t + L}{B(t,T)},$$

so ließe sich ohne Einsatz von Mitteln/Vermögen durch folgende Strategie Gewinn machen:

- Emission von Nullkuponanleihen, um den Betrag $G_t + L$ zu erhalten.
- Investition dieses Betrags in das Gut G und Bezahlung der Lagerkosten in Höhe von L.
- Short-Position in dem Terminvertrag.

Die zugehörige Tabelle sieht folgendermaßen aus:

Position	Wert in t	Wert in T
eine Einheit von G long	$G_t + L$	G_T
$(G_t + L)/B(t,T)$ Nullkuponanleihen short	$-(G_t + L)$	$-(G_t + L)/B(t,T)$
Terminvertrag short	0	$-(G_T - F^G(t,T))$
gesamtes Portfolio	0	$F^G(t,T) - (G_t + L)/B(t,T)$

Somit wäre aus Nichts Geld gemacht. Dies steht im Widerspruch zur Arbitragefreiheit. Im Gegensatz zu den vorherigen Terminvertragspreisen ist eine Gleichheit jedoch aus folgenden Gründen nicht klar:
Um die andere Ungleicheit

$$F^G(t,T) < \frac{G_t + L}{B(t,T)}$$

auszuschließen, würde man eine Strategie formulieren, die der obigen entgegengesetzt ist:

- Investition des Betrags $G_t + L$ in Nullkuponanleihen.
- Verkauf des Guts G und Einsparung der Lagerkosten in Höhe von L.
- Long-Position in dem Terminvertrag.

Die zugehörige Tabelle sähe jetzt folgendermaßen aus:

Position	Wert in t	Wert in T
eine Einheit von G short	$-(G_t + L)$	$-G_T$
$G_t + L$ in Nullkuponanleihen investiert	$G_t + L$	$(G_t + L)/B(t,T)$
Terminvertrag long	0	$(G_T - F^G(t,T))$
Gesamtes Portfolio	0	$(G_t + L)/B(t,T) - F^G(t,T)$

Wenn das Gut überwiegend zu Produktionszwecken (anstatt zu Spekulationszwecken) genutzt wird, ist dieser Handel jedoch wirklichkeitsfern: realiter ist man dann i.d.R. nicht gewillt, das Gut zu verkaufen und einen Terminvertrag darauf einzugehen, da somit das Gut im Zeitintervall $[t,T]$ nicht für den Konsum zur Verfügung steht.

2.3.3.6 Bezeichnung: Gilt auf den Terminmärkten

- $F^G(t,T) > G_t$, so spricht man davon, der Markt sei im ***contango***.
- $F^G(t,T) < G_t$, nennt man den Markt in ***backwardation***.

2.3.4 Optionen

Vertragseigenschaften und Begrifflichkeiten

2.3.4.1 Definition: *Es sei ein Wertpapier S gegeben, z.B. eine Aktie oder eine fremde Währung. Ein Vertrag, bei dem dem Käufer zur Zeit t das Recht eingeräumt wird*

- *zu einem fest vereinbarten* ***Ausübungszeitpunkt*** *T mit $t < T$*
- *das Wertpapier S*
- *zum* ***Ausübungspreis*** *(engl.* ***strike****) K*

zu erwerben, wird **europäische Kaufoption** *bzw.* **europäische Call-Option** *genannt. Ein Vertrag, bei dem dem Käufer zur Zeit t das Recht eingeräumt wird*

- *zu einem fest vereinbarten* ***Ausübungszeitpunkt*** *T mit $t < T$*
- *das Wertpapier S (auch* **underlying** *genannt)*
- *zum* ***Ausübungspreis*** *K*

zu verkaufen, wird **europäische Verkaufsoption** *bzw.* **europäische Put-Option** *genannt.*
Die Zeit zwischen t und T nennen man ***Restlaufzeit****. Unter einer* ***amerikanischen (Ver-)Kauf(s)option*** *versteht man das Recht, zu einem beliebigen Zeitpunkt binnen der Restlaufzeit zu einem fest vereinbarten Ausübungspreis das Wertpapier zu (ver-)kaufen.*

Auszahlungsprofile bei Fälligkeit

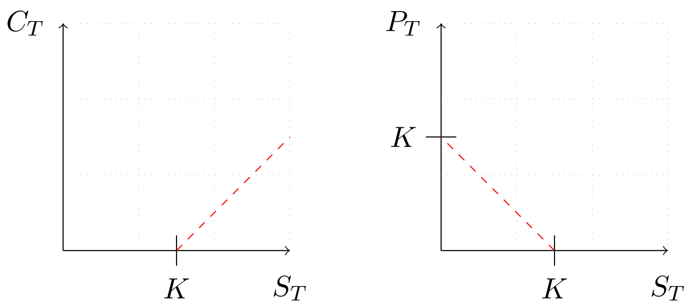
Würde ein Käufer einer europäischen Kaufoption zu einem Wertpapier S von seinem Recht Gebrauch machen, wenn der Ausübungspreis K oberhalb des Preises des Wertpapiers S_T liegt, würde er freiwillig einen Verlust machen, da er das Wertpapier zum Fälligkeitszeitpunkt T auch zum Preis S_T erstehen könnte. Daher ist der Gewinn/Wert der Kaufoption zum Fälligkeitszeitpunkt durch die Formel

$$C_T = \max(S_T - K, 0) = (S_T - K)^+ \text{ beschrieben.}$$

In gleicher Weise erhält man für die Verkaufsoption zum Fälligkeitszeitpunkt T den Wert

$$P_T = \max(K - S_T, 0) = (K - S_T)^+.$$

In Abhängigkeit von K und S_T ergeben sich also folgende Schaubilder:



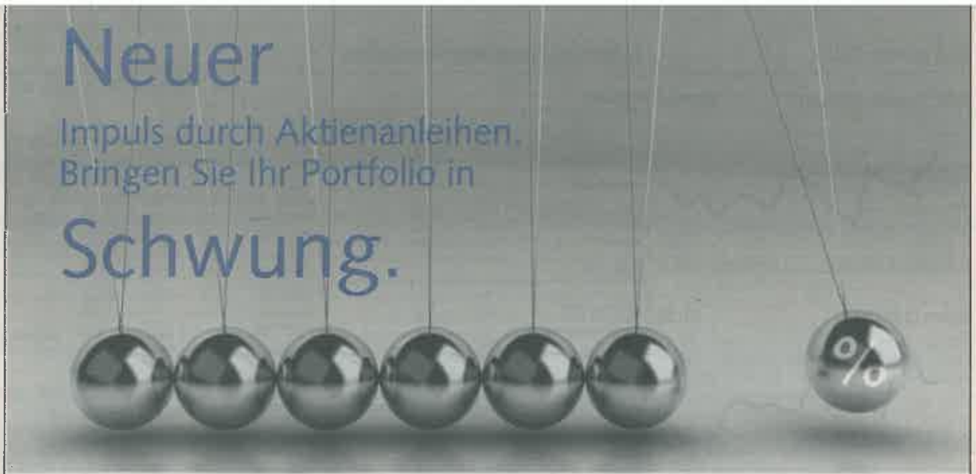
Optionen in der Risikosteuerung

2.3.4.2 Beispiel (Absichern einer Position durch Verkaufsoptionen)**:** Ein Anleger halte 10 Aktien im Depot, welche zum heutigen Tag ($t = 0$) einen Kurs von S_0 haben. Um einen Verlust bis zur Zeit $T = 1$ zu vermeiden, kauft er außerdem 10 europäische Verkaufsoptionen zum Ausübungspreis S_0. Zusammen haben diese beiden Positionen zur Zeit $T = 1$ den Wert

$$V_T = \begin{cases} 10(S_1 + 0) & \text{wenn } S_1 \geq S_0 \\ 10(S_1 + (S_0 - S_1)) = 10S_0 & \text{wenn } S_1 < S_0. \end{cases}$$

Somit wird - unter Zahlung der Summe, die zum Erwerb der Verkaufsoptionen gebraucht wird - gewährleistet, daß ein Wertverfall unter die Grenze von $10S_0$ nicht geschehen kann.

2.3.4.3 Bemerkung: In der Regel ist dies nicht die effizienteste Weise, den Verfall von gehaltenen Aktien abzusichern.



Aktienanleihen von Vontobel

CLASSIC Aktienanleihen

Kupon p.a.	Basiswert	WKN	Anz. Aktien	Basispreis	Bewertungstag	Preis*
12,45%	Allianz SE	VT4QX8	12,50000	€ 80,00	15.03.2013	99,20%
10,00%	BASF SE	VT4QYN	16,66667	€ 60,00	15.03.2013	98,60%
10,15%	BMW AG	VT4QYB	17,24138	€ 58,00	15.03.2013	99,50%
12,20%	Daimler AG	VT4QYC	26,31579	€ 38,00	15.03.2013	99,90%
12,85%	Deutsche Bank AG	VT4QYQ	33,33333	€ 30,00	15.03.2013	98,00%
11,45%	E.ON AG	VT4QYL	62,50000	€ 16,00	15.03.2013	99,10%
10,85%	Siemens AG	VT4QYH	14,70588	€ 68,00	15.03.2013	99,50%

*Stand am 27.04.2012

Diese Produkte bieten keinen Kapitalschutz. Anleger tragen das Risiko des Geldverlustes bei Zahlungsunfähigkeit des Emittenten bzw. des Garanten (Emittentenrisiko).
Informieren Sie sich jetzt auf **www.vontobel-zertifikate.de** oder **Gratis-Hotline 00800 93 00 93 00**

Abonnieren Sie jetzt...
Ihren persönlichen «Aktienanleihen Weekly» Newsletter per E-Mail an zertifikate@vontobel.de

Allein maßgeblich sind die jeweiligen Wertpapierprospekte, die beim Emittenten, Vontobel Financial Products GmbH, Bockenheimer Landstraße 24, 60323 Frankfurt am Main kostenlos erhältlich bzw. im Internet unter www.vontobel-zertifikate.de zum Download verfügbar sind. Anleger werden gebeten, die bestehenden Verkaufsbeschränkungen zu beachten.

Nähere Informationen bei Bank Vontobel Europe AG, Niederlassung Frankfurt am Main, Bockenheimer Landstraße 24, 60323 Frankfurt am Main

VONTOBEL

Private Banking
Investment Banking
Asset Management

Leistung schafft Vertrauen

2.3.4.4 Beispiel (Absichern des Wechselkursrisikos einer Rohöllieferung)**:** Eine Firma erwartet in einem Monat ($T = 1$) eine in USD zu bezahlende Rohöllieferung im Wert von 1 Mio. Dollar. e_1 sei der heute unbekannte Wechselkurs €/$ in $T = 1$, während e_0 den heute bekannten Wechselkurs $e_0 = 1,15$ darstellt. Zur Vereinfachung wird angenommen, daß die Zinsen in beiden Währungen gleich sind. Nun betrachtet man folgende Strategien:

1. „Mache nichts“.
2. „Kaufe Terminvertrag“ - d.h. kaufe 1 Mio. $ auf Termin mit Basispreis $K = e_0 = 1,15$ € zum Preis von 0 €/$(s. Hilfssatz 2.3.3.3).
3. „Kaufe Kaufoptionen“ - d.h. kaufe 1 Mio. (europäische) Kaufoptionen mit Basispreis $1,15$ € zu je einem Preis C_0.

Am Fälligkeitszeitpunkt kostet der Kauf dann folgende Beträge:

Strategie	$e_1 = 1,2$ (Dollar teurer)	$e_1 = 1,1$ (Dollar billiger)
1	$1,2$ Mio. €	$1,1$ Mio. €
2	$1,15$ Mio. €	$1,15$ Mio. €
3	$(1,15 + C_0)$ Mio. €	$(1,1 + C_0)$ Mio. €

Man sieht deutliche Unterschiede. Der Terminvertrag bietet Schutz gegen steigende Kurse, bei fallenden Kursen wird er jedoch teuer. Die Option bietet ebenfalls Schutz gegen Verteuerung des Dollars, bei einem Fall des Dollars ist der Verlust jedoch auf den Kaufpreis der Optionen beschränkt.

Wertgrenzen für Optionen - der Fall ohne Dividenden

2.3.4.5 Generalvoraussetzung: Die Aktien zahlen zwischen den Erwerbszeitpunkten t und den Fälligkeitszeitpunkten T der Optionen keine Dividende. Außerdem gibt es auf dem Markt keine Arbitragemöglichkeiten.

2.3.4.6 Hilfssatz: *Es gelten dann für den Preis C_t einer europäischen Kaufoption zur Zeit t die Ungleichungen*

$$(S_t - KB(t,T))^+ \le C_t \le S_t.$$

Beweis. Zunächst zeigt man die rechte Ungleichung durch Widerspruch:
Im Fall $C_t > S_t$ betrachte man folgende Strategie:

Position	Wert in t	Wert in T	
		$S_T \le K$	$S_T > K$
short call	$-C_t$	$-C_T = 0$	$-C_T = -(S_T - K)$
long Aktie	S_t	S_T	S_T
Portfolio	$S_t - C_t$	S_T	K.

Man sieht, daß hierdurch aus nichts Geld geschaffen worden wäre: In beiden Fällen ist zum Zeitpunkt T ein positiver Wert vorhanden, während zur Zeit t der Wert des Portfolio negativ gewesen ist. Da das aufgrund der Arbitragefreiheit nicht möglich ist, ist die Prämisse falsch.
Für die nächste Ungleichung erfolgt der Beweis abermals durch Widerspruch. Würde sie nicht gelten, sei also $(S_t - KB(t,T))^+ > C_t$, dann betrachte man folgendes Portfolio:

Position	Wert in t	Wert in T	
		$S_T \leq K$	$S_T > K$
long call	C_t	$C_T = 0$	$C_T = S_T - K$
long K Nullkuponanleihen	$KB(t,T)$	K	K
short in der Aktie	$-S_t$	$-S_T$	$-S_T$
	<0	$K - S_T \geq 0$	0

Dies würde bedeuten, daß man aus einem Portfolio mit negativem Wert eines machen könnte, welches in T einen Wert von 0 oder mehr hat. ◊

Die zweite Ungleichung zeigt, daß es eine nicht-negative Differenz x zwischen dem Preis einer Verkaufsoption und der Position $S_t - Ke^{-r(T-t)}$ gibt. Es gilt nämlich folgender

2.3.4.7 Satz (Put-Call Parität)**:** *Die Preise eines europäischen Calls C_t und eines europäischen Puts P_t stehen - vorausgesetzt, es gibt keine Dividendenzahlungen - in folgender Beziehung zueinander:*

$$C_t + Ke^{-r(T-t)} = S_t + P_t.$$

Beweis. Der Beweis erfolgt durch Auswahl und Untersuchung zweier geeigneter Portfolien, die da im Einzelnen wären:

1. Portfolio	Wert in t	Wert in T	
		$S_T \leq K$	$S_T > K$
long call	C_t	0	$S_T - K$
long K Nullkuponanleihen	$KB(t,T)$	K	K
gesamt	$C_t + KB(t,T)$	$\max(S_T, K)$	

und

2. Portfolio	Wert in t	Wert in T	
		$S_T \leq K$	$S_T > K$
long Aktie	S_t	S_T	S_T
long put	P_t	$K - S_T$	0
gesamt	$P_t + S_t$	$\max(S_T, K)$	

Da beide Portfolien zum Zeitpunkt T denselben Wert besitzen und zwischendurch keine Auszahlungen in Form einer Dividende stattfinden, müssen diese beiden Portfolien zum Zeitpunkt t bereits denselben Wert haben. ($B(t,T)$ ist hier durch die zeitstetige Verzinsung dargestellt, d.h.

$$B(t,T) = e^{-r(T-t)}).$$

◊

2.3.4.8 Bemerkung (Empirie)**:**

Aus dem obigen Hilfssatz 2.3.4.6 erhält man unter der Voraussetzung, daß keine Dividenden gezahlt werden, die folgende Aussage:

2.3.4.9 Satz (Merton)**:** *Wenn keine Dividenden bezahlt werden, sind die Preise amerikanischer und europäischer Kaufoptionen gleich, d.h. es ist bei einer amerikanischen Kaufoption nie optimal, vorzeitig von dem Recht auf den Kauf des Underlyings Gebrauch zu machen:*

$$C_t^A = C_t.$$

Beweis. Da dem Käufer einer amerikanischen Kaufoption mehr Rechte eingeräumt werden, ist der Preis in keinem Fall niedriger: $C_t^A \geq C_t$. Würde dieser Käufer zu einem Zeitpunkt $\tau \in [t, T]$ von seinem Recht, das Underlying zu kaufen, Gebrauch machen, erhielte er $(S_\tau - K)^+$. Allerdings gilt zu diesem Zeitpunkt für die europäische Kaufoption $C_\tau \geq (S_\tau - KB(\tau, T))$ (s. Hilfssatz 2.3.4.6). Dies ist strikt größer als das, was man bei Ausübung der amerikanischen Verkaufsoption erhalten hat. Das heißt

$$C_\tau^A \geq C_\tau \geq S_\tau - KB(\tau, T) \geq S_\tau - K.$$

Also wäre es ungünstig, zwischenzeitlich von der Möglichkeit des Erwerbs des Underlyings Gebrauch zu machen. $\diamond$

Im Wesentlichen beruht die obige Aussage auf der Annahme, daß sich der Ausübungspreis K verzinsen wird und man bei vorzeitigem Kauf des Underlyings auf diese Verzinsung verzichtete. Bei dem Erwerb von Verkaufsoptionen ist es jedoch genau anders herum:

2.3.4.10 Hilfssatz (Put-Call-Relation für amerikanische Optionen)**:** *Für amerikanische Puts P_t^A und Calls C_t^A zu demselben Underlying, Ausübungspreis und -zeitpunkt gilt - sofern keine Dividenden gezahlt werden - Folgendes:*

$$S_t - K \leq C_t^A - P_t^A \leq S_t - Ke^{-r(T-t)}.$$

Beweis. Klar ist, daß die amerikanische Option mindestens so viel Wert ist wie die europäische: $P_t^A \geq P_t$. Aus der Put-Call Parität (s. 2.3.4.7) erhält man dann mit dem Satz von Merton (s. 2.3.4.9):

$$C_t^A - P_t^A = C_t - P_t^A \leq C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}.$$

Dies zeigt die rechte Seite. Die linke Seite erhält man durch den Vergleich zweier Portfolien. Genauer zeigt man $S_t + P_t^A \leq C_t^A + K$. Hierzu hält man ein $\tau \in (t, T]$ fest. Die zwei Portfolien sehen nun folgendermaßen aus:

Position	Wert in t	Wert in τ
long call	$C_t^A = C_t$	$C_\tau^A = C_\tau$
$KB(t,\tau)$ Nullkuponanleihen	$KB(t,\tau)$	K
gesamt	$C_t + KB(t,\tau)$	$C_\tau^A + K$

Position	Wert in t	Wert in τ
long put	P_t^A	P_τ^A
long Aktie	S_t	S_τ
gesamt	$P_t^A + S_t$	$\max(S_\tau, K)$

Nun gilt $C_\tau^A + K \geq (S_\tau - KB(\tau,T))^+ + K \geq (S_\tau - K)^+ + K = \max(S_\tau, K)$. Die erste Ungleichung ist wegen Hilfssatz 2.3.4.6 klar. Der Rest ergibt sich von selbst. Dies zeigt, daß zu jedem $\tau \in (t,T]$ die Ungleichheit $S_\tau + P_\tau^A \leq C_\tau^A + K$ gilt. Aus Arbitragegründen gilt die Ungleichung dann auch für $\tau = t$. ◇

Wertgrenzen für Optionen bei Berücksichtigung von Dividendenzahlungen

Kurz vor Auszahlung ist eine Dividende i.d.R. bereits angekündigt, daher lässt sich über einen kurzen Zeitraum die Dividende mit ziemlicher Sicherheit vorhersagen. Im Folgenden wird also davon ausgegangen, daß die Dividende(n) bis zum Laufzeitende der Option bereits bekannt ist/sind. Mit D bezeichne man die Summe aller auf den Zeitpunkt t abdiskontierten Dividendenzahlungen. Somit erhält man direkt

$$C_t \geq S_t - D - KB(t,T),$$

indem man das zuvor Gesagte auf $S_t - D$ anwendet, d.h. auf ein Portfolio

$$S_t - \sum_{i=1}^{n} D_i B(t, T_i),$$

wobei D_i die Dividende zum Zeitpunkt $T_i < T$ darstellt. Es kann optimal sein, zu den Dividendenzahlungspunkten von der Kaufoption Gebrauch zu machen. Betrachtet man die mögl. Ausübung zum Dividendenzeitpunkt T_i, so würde man diese nur durchführen, wenn $S_t > K$ ist. Genauer: Man wird direkt vor der Dividendenzahlung die Option ausüben, um auch die Dividende zu erhalten. Den Wert der Aktie bezeichnet man dann mit S_{T_i-}. Hierbei signalisiert das $-$, daß es sich um den linken Grenzwert, also

$$S_{T_i-} = \lim_{t \nearrow T_i} S_t \text{ handelt.}$$

Gewonnen wird dann

$$S_{T_i-} - K$$

durch die Ausübung. Allerdings gilt ebenso für den Preis der Kaufoption in T_i nach der Dividendenzahlung

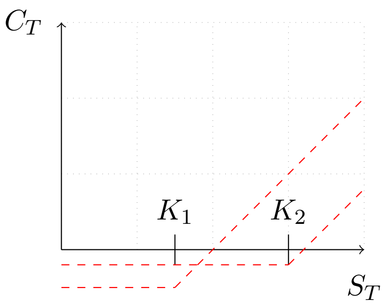
$$C_{T_i}^A \geq C_{T_i} \geq S_{T_i} - D_i - KB(T_i, T).$$

Wäre der Preis der Kaufsoption höher als der derzeit in T_i durch Ausübung erzielbare Gewinn, wäre es folglich nicht optimal, die Ausübung vorzunehmen. Dies ist dann der Fall, wenn

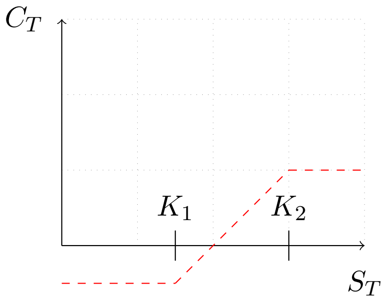
$$D_i \leq K(1 - B(T_i, T)) \text{ gilt.}$$

Optionsstrategien

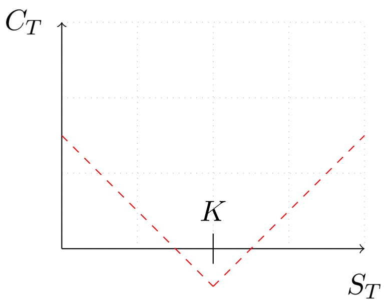
Die Gewinnprofile einfacher europäischer Kaufoptionen sehen folgendermaßen aus:



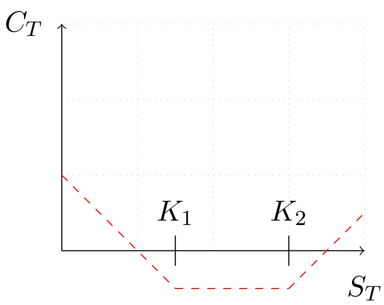
1. Bull-Call-Spread: Zwei Kaufoptionen mit unterschiedlichen Strikes/Ausübungspreisen $K_1 < K_2$, wobei die erste gehalten wird und die zweite verkauft wird:



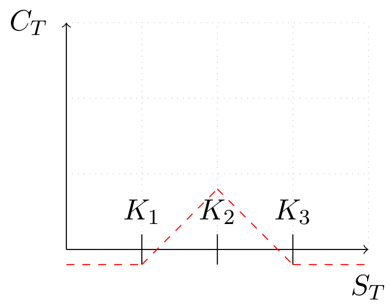
2. Bear-Call-Spread: vertausche K_1 und K_2.
3. Straddle: Kauf- und Verkaufsoption zum selben Ausübungspreis:



4. Strangle



5. Butterfly: $Call(K_1) - 2 \cdot Call(K_2) + Call(K_3)$:



2.3.4.11 Beispiel (Steueroptimierung mit Optionen, s. [Hul15], Kap. 9)**:** Steuervermeidungskonzept in vereinfachter Form:

- Land A besteuert Zinsen und Dividenden niedrig, dafür aber Kapitalgewinne (z.B. Aktienkursgewinne) hoch.
- Land B besteuert Kapitalgewinne niedrig, dafür Zinsen und Dividenden hoch.

Für ein Unternehmen wäre es sinnvoll, Einkommen aus Wertpapieren in Land A zu versteuern und Kapitalgewinne in Land B zu versteuern. Kapitalverluste würde man in Land A belassen, womit man Kapitalgewinne aus anderen Produkten nach unten drücken kann.

Man erreicht das, indem man ein Tochterunternehmen in Land A den rechtlichen Eigentümer eines Wertpapiers sein lässt und ein Tochterunternehmen in Land B dazu veranlasst, vom Tochterunternehmen in Land A eine Kaufoption auf das Wertpapier zum Basispreis des aktuellen Kurses zu erwerben. Während der Laufzeit des Optionsvertrags wird der Gewinn des Wertpapiers in Land A realisiert. Steigt dessen Wert an, wird zum Laufzeitende die Option ausgeübt und somit der Kapitalgewinn in Land B erzielt. Fällt der Wert jedoch, bleiben die Verluste in Land A. (Quelle [Hul15], Seite 293 f.).

2.3.4.12 Beispiel (Dividende der Gucci-Gruppe, s. [Hul15] Kap. 9)**:** Jede Dividende vermindert den Wert einer Aktie, da das dividendenzahlende Unternehmen durch den Kapitalabfluss weniger wert ist als zuvor. Dies hat natürlich auch Einfluß auf den Wert einer Option. Auf amerikanischen Märkten kann die Börse in diesem Fall (durch eine sog. Option Clearings Corporation, kurz OCC, als Subunternehmen der Börse) die Bedingungen der Optionen anpassen.

Dem Buch von [Hul15] (s. dort auf Seite 285) zufolge hat die Gucci-Gruppe Ende Mai 2003 eine Dividendenausschüttung in Höhe von ca. 15,88 \$ (das entsprach 13,5 €) pro Aktie angekündigt, was dann später durch die Hauptversammlung Mitte Juli dieses Jahres bestätigt wurde. Zum Zeitpunkt der Ankündigung betrug die Höhe der Dividende 16 % des Aktienpreises. Die OCC entschied sich in diesem Fall dazu, die Optionsbedingungen aller Optionen auf Gucci-Aktien anzupassen. Inhaber einer Kaufoption zahlten bei Ausübung den Basispreis und erhielten neben der Aktie 15,88 Dollar zusätzlich. Dies entspricht de facto einer Verminderung des Basispreises um die gezahlte Dividende.

Auf deutschen Märkten kann dies auch vorkommen (s. [Hul15] an o.g. Stelle). Früher - insbesondere vor Einführung von Börsen für den Optionshandel - waren Optionen in der Regel dividendengeschützt - d.h. eine Dividende wirkte sich nicht negativ auf die Option aus.

3 Einperiodenmodelle zur Wertpapierbewertung

3.1 Beschreibung des einperiodischen Modells

Es seien zwei Zeitpunkte $t = 0, 1$ gegeben. Der Finanzmarkt habe $d + 1$ verschiedene Wertpapiere, deren Preise in $t = 0$ bekannt sind, nicht jedoch in $t = 1$. Die mathematische Modellierung der Unsicherheit in $t = 1$ geschieht durch die Einführung eines geeigneten Wahrscheinlichkeitsraums $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$, auf dem eine vektorwertige Zufallsvariable $\overline{S}$ für die Beschreibung der ungewissen Kursstände/Preisentwicklungen in $t = 1$ bestimmt ist. In der Regel ist die erste Komponente deterministisch und modelliert eine festverzinsliche (Bargeld-)Anlage oder eine Nullkuponanleihe.

3.1.0.1 Definition: *Ein Tripel* $((\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}), \overline{\Pi}, \overline{S})$ *mit*

- *einem Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$,
- *einem* ***Preisvektor*** $\overline{\Pi} \in \mathbb{R}^{d+1}$ *in* $t = 0$.
- *und einer Zufallsvariable* $\overline{S} : \Omega \to (\mathbb{R}_{\geq 0})^{d+1}$ *als* ***Marktpreisvektor*** *zum Zeitpunkt* $t = 1$

heißt ein d***-dimensionales einperiodisches Finanzmarktmodell***.

3.1.0.2 Bemerkung: Während der Wahrscheinlichkeitsraum Ω für die Menge der Marktszenarien zum Zeitpunkt $t = 1$ steht, liefert die σ-Algebra $\mathfrak{F}$ die Menge der im Modell sinnvoll beschreibbaren Ereignisse. Eine Menge $A \in \mathfrak{F}$ mit $\mathbb{P}(A) = 0$ nennt man ***vernachlässigbar***. Die Komponenten des Vektors $\overline{\Pi}$ beschreiben die Preise der $d + 1$ Wertpapiere zum Zeitpunkt $t = 0$, deren Kursstände werden zur Zeit $t = 1$ als Zufallsvariablen $S^i : \Omega \to \mathbb{R}$, mit $0 \leq i \leq d$ modelliert.

3.1.0.3 Bezeichnung:

$$\overline{\Pi} = (\Pi^0, \Pi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \ \Pi^0 = 1$$

$$\overline{S} = (S^0, S) \in \mathbb{R}^{1+d}, \ S^0 = (1 + r) \ \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

Hierbei bezeichne der Parameter r die zwischen $t = 0$ und $t = 1$ stattfindende Verzinsung. Dabei wird ab hier implizit davon ausgegangen, daß $r > -1$ ist. Statt S^0 schreibt man gelegentlich auch B für „Bond“, dem englischen Ausdruck für eine börsengehandelte Anleihe.

Die Konvention $S^0 = (1 + r)$ und $\Pi^0 = 1$ bedeutet, daß das 0. Wertpapier für 1 € zu kaufen ist und in $t = 1$ genau $(1 + r)$€ wert ist. Dies hat zur Folge, daß sich das 0. Wertpapier unabhängig von den Ereignissen $\omega \in \Omega$ entwickelt, also risikofrei mit dem Satz r verzinst wird. Die Bedingung $r > -1$ bedeutet, daß das Vermögen in $t = 1$ nicht 0 ist.

3.1.0.4 Beispiel: $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}) = (\{0,1\}, \mathfrak{P}(\{0,1\}), \mathbb{P}), \mathbb{P}(\{0\}) = \frac{1}{3}, \mathbb{P}(\{1\}) = \frac{2}{3}$ mit

$$\overline{\Pi} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \overline{S} = \begin{pmatrix} B \\ S \end{pmatrix} : \Omega \to \mathbb{R}^{1+1}$$

und

$$\overline{S}(\omega = 0) = \begin{pmatrix} 1+r \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overline{S}(\omega = 1) = \begin{pmatrix} 1+r \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

3.1.0.5 Definition: *Ein Vektor* $\overline{\xi} \in \mathbb{R}^{d+1}$ *heißt* ***Portfolio****.*
Das Skalarprodukt

$$< \overline{\xi}, \overline{\Pi} >_{\mathbb{R}^{d+1}} = \overline{\xi} \cdot \overline{\Pi} \text{ \textit{heißt} \textbf{\textit{Preis des Portfolio in}} } t = 0.$$

Der ***Wert des Portfolio*** *in* $t = 1$ *ist durch*

$$< \overline{\xi}, \overline{S} >_{\mathbb{R}^{d+1}} = \overline{\xi} \cdot \overline{S} \text{ \textit{gegeben.}}$$

3.2 Arbitrage im einperiodischen Modell

3.2.1 Arbitragegelegenheiten

3.2.1.1 Definition: *Unter einer* ***Arbitragegelegenheit*** *versteht man im einperiodischen Modell einen Vektor* $\overline{\xi} \in \mathbb{R}^{1+d}$*, für den sowohl*

$$\overline{\Pi} \cdot \overline{\xi} \leq 0,$$

als auch

$$\overline{S} \cdot \overline{\xi} \geq 0 \ \mathbb{P}\text{-\textit{fast sicher,}}$$

sowie

$$\mathbb{P}(\overline{S} \cdot \overline{\xi} > 0) > 0 \text{ \textit{gilt.}}$$

3.2.1.2 Bezeichnung: Für eine reellwertige, auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ definierte Zufallsvariable X bezeichne $X \geq^* 0$, daß $X \geq 0$ $\mathbb{P}$-fast sicher gilt. Analog stehe $X >^* 0$ dafür, daß zudem (!) $X > 0$ mit einer Wahrscheinlichkeit >0 gilt, also $\mathbb{P}(X > 0) > 0$ gilt. Im ersten Fall heißt X ***nicht wesentlich negativ***, im zweiten Fall ***wesentlich positiv***. Entsprechend bezeichnen $X \geq^* Y$ und $X >^* Y$, daß $X - Y \geq^* 0$ und $X - Y >^* 0$ gelten.

3.2.1.3 Bemerkung: In dieser Notation liest sich die Arbitragebedingung an $\overline{\xi} \in \mathbb{R}^{d+1}$ im Modell $((\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}), \overline{\Pi}, \overline{S})$ als

$$\overline{\Pi} \cdot \overline{\xi} \leq 0 \text{ und } \overline{\xi} \cdot \overline{S} >^* 0.$$

3.2.1.4 Hilfssatz: *In einem d-dimensionalen einperiodischen Finanzmarktmodell sind folgende Aussagen gleichwertig:*

1. *$((\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P}),\overline{\Pi},\overline{S})$ hat eine Arbitragegelegenheit.*

2. *Es gibt ein $\xi \in \mathbb{R}^d$, so daß $\xi \cdot S >^* (1+r)\xi \cdot \Pi$ gilt.*

Beweis. "1 $\longrightarrow$ 2": Man nimmt sich eine Arbitragegelegenheit $\overline{\xi} = (\xi^0,\xi) \in \mathbb{R}^{1+d}$, für die definitionsgemäß

$$\overline{\xi} \cdot \overline{\Pi} = \xi^0 + \xi \cdot \Pi \leq 0 \text{ und } \overline{\xi} \cdot \overline{S} >^* 0 \text{ gilt.}$$

Wegen $r > -1$ ist auch

$$\xi \cdot S - (1+r)\xi \cdot \Pi \geq \xi \cdot S + (1+r)\xi^0 = \overline{\xi} \cdot \overline{S}.$$

Gemäß der Voraussetzung ist die rechte Seite wesentlich positiv, ergo auch die linke.
"2 $\longrightarrow$ 1": In $\xi \in \mathbb{R}^d$ sei ein Vektor wie in Aussage 2 gegeben. Man setzt $\xi^0 = -\xi \cdot \Pi$ und erhält den Vektor

$$\overline{\xi} = (\xi^0,\xi) \in \mathbb{R}^{d+1},$$

dessen Skalarprodukt mit $\overline{\Pi}$ den Wert

$$\overline{\xi} \cdot \overline{\Pi} = 0 \text{ ergibt.}$$

Außerdem gilt

$$\overline{\xi} \cdot \overline{S} = -(1+r)\xi \cdot \Pi + \xi \cdot S.$$

Lt. Voraussetzung ist

$$\xi \cdot S - (1+r)\xi \cdot \Pi >^* 0,$$

und somit auch $\overline{\xi} \cdot \overline{S}$. Das bedeutet, $\overline{\xi}$ ist eine Arbitragegelegenheit. ◇

3.2.1.5 Definition: *Ein Finanzmarktmodell ist **arbitragefrei**, wenn es keine Arbitragegelegenheit gibt.*

3.2.1.6 Bemerkung: Würde man den Zufallsvektor $Y = \frac{S}{1+r} - \Pi$ der diskontierten Zuwächse verwenden, so wäre die Arbitragefreiheit gerade dadurch bestimmt, daß für jeden Vektor $\xi \in \mathbb{R}^d$

$$\xi \cdot Y \not>^* 0 \text{ gilt.}$$

3.2.2 Absolutstetigkeit von Maßen

Es seien zwei Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathbb{P}$ und $\mathbb{Q}$ auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega,\mathfrak{F})$ gegeben.

3.2.2.1 Definition: *Man nennt das Maß $\mathbb{Q}$ **absolutstetig in Bezug auf** $\mathbb{P}$ und die σ-Algebra $\mathfrak{F}$, wenn für jedes $A \in \mathfrak{F}$ mit $\mathbb{P}(A) = 0$ auch $\mathbb{Q}(A) = 0$ gilt. Man bezeichnet dies mit $\mathbb{Q} << \mathbb{P}$.*

3.2.2.2 Satz (Radon-Nikodym)**:** *Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ ist genau dann absolutstetig in Bezug auf $\mathbb{P}$ und die σ-Algebra $\mathfrak{F}$, wenn es eine nicht-negative, $\mathfrak{F}$-meßbare Zufallsvariable $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ gibt, so daß für jedes $A \in \mathfrak{F}$ folgende Gleichung gilt:*

$$\mathbb{Q}(A) = \int_A Z d\mathbb{P}.$$

3.2.2.3 Bemerkung: Bei den Notationen des 3.2.2.2. Satzes schreibt man auch

$$Z = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}.$$

Man bezeichnet Z als ***Radon-Nikodym-Dichte***.

3.2.3 Äquivalente Maße und Modelle

3.2.3.1 Definition: *Zwei Maße $\mathbb{P}$ und $\mathbb{Q}$ auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{F})$ nennt man* ***äquivalent****, wenn ihre Nullmengen übereinstimmen, das heißt*

$$\bigwedge_{A \in \mathfrak{F}} \mathbb{P}(A) = 0 \Longleftrightarrow \mathbb{Q}(A) = 0.$$

Die Schreibweise hierfür ist $\mathbb{P} \sim \mathbb{Q}$.

Die Maße $\mathbb{P}$ und $\mathbb{Q}$ sind also genau dann äquivalent, wenn sie wechselweise absolut stetig zueinander sind, d.h.

$$\mathbb{P} << \mathbb{Q} \text{ sowie } \mathbb{Q} << \mathbb{P}$$

3.2.3.2 Bemerkung: Für zwei äquivalente Maße $\mathbb{P} \sim \mathbb{Q}$ auf $(\Omega, \mathfrak{F})$ gilt offenbar für jede Zufallsvariable X auf diesem Raum:

$$X >^*_{\mathbb{P}} 0 \Longleftrightarrow X >^*_{\mathbb{Q}} 0.$$

3.2.3.3 Definition: *Zwei Einperiodenmodelle $M_1 = ((\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}), \overline{\Pi}, \overline{S})$ und $M_2 = ((\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{Q}), \overline{\Pi}, \overline{S})$ heißen* ***äquivalent****, wenn ihre Wahrscheinlichkeitsmaße zueinander äquivalent sind, d.h. $\mathbb{P} \sim \mathbb{Q}$.*

3.2.3.4 Bemerkung: Im Fall zweier äquivalenter einperiodischer Modelle stimmen die Mengen der Arbitragegelegenheiten miteinander überein.

3.2.3.5 Bemerkung: Tatsächlich sind auch sämtliche weiteren Aussagen, die im Folgenden über ein Finanzmarktmodell getroffen werden, von der genauen Wahl des Maßes $\mathbb{P}$ in seiner Klasse äquivalenter Maße unabhängig. Das Maß $\mathbb{P}$ hat somit allein die Funktion, die irrelevanten Marktszenarien zugunsten der Relevanten zu unterscheiden.

3.3 Der erste Hauptsatz der Wertpapierbewertung

3.3.0.1 Definition: *Es sei ein Finanzmarktmodell $((\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}), \overline{\Pi}, \overline{S})$ gegeben. Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^*$ heißt* ***risikoneutral****, falls*

$$\bigwedge_{i=1,\dots,d} \Pi^i = \mathbb{E}^*\left(\frac{S^i}{1+r}\right) = \frac{1}{1+r}\mathbb{E}^*(S^i) \text{ gilt.}$$

Die Menge

$$\mathcal{P} := \{\mathbb{P}^* | \mathbb{P}^* \text{ ist ein risikoneutrales Maß und äquivalent zu } \mathbb{P}(\Omega, \mathfrak{F})\}$$

beschreibt die Menge der (zueinander äquivalenten) risikoneutralen Maße des Modells $((\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}), \overline{\Pi}, \overline{S})$.

3.3.0.2 Satz (Erster Hauptsatz der Wertpapierbewertung, FTAP)**:** *Das d-dimensionale Marktmodell $((\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}), \overline{\Pi}, \overline{S})$ ist genau dann arbitragefrei, wenn die Menge $\mathcal{P}$ nicht leer ist. In diesem Fall gibt es sogar ein $\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}$ mit beschränkter Radon-Nikodym-Dichte $Z = \frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}}$.*

Beweis. „$\Leftarrow$": Sei $\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}$ und $\overline{\xi} \in \mathbb{R}^{d+1}$ mit $\overline{\xi} \cdot \overline{S} >^*_{\mathbb{P}^*} 0$ gegeben. Somit gilt auch für äquivalente $\mathbb{P} \sim \mathbb{P}^*$

$$\overline{\xi} \cdot \overline{S} >^*_{\mathbb{P}} 0.$$

Außerdem ist

$$\overline{\xi} \cdot \overline{\Pi} = \sum_{i=0}^{d} \xi^i \cdot \Pi^i = \sum_{i=0}^{d} \frac{1}{1+r} \mathbb{E}^*(S^i) \cdot \xi^i = \frac{1}{1+r} \mathbb{E}^*(\overline{\xi} \cdot \overline{S}) > 0,$$

das bedeutet, $\overline{\xi}$ kann keine Arbitragegelegenheit darstellen.
„$\Rightarrow$": Sei $Y^i = \frac{S^i}{1+r} - \Pi^i$ (diskontierte Zuwächse/Gewinne), dann gilt lt. 3.2.1.4 genau dann Arbitragefreiheit, wenn für jedes $\xi \in \mathbb{R}^d$

$$Y \cdot \xi \not>^* 0 \text{ gilt.}$$

Das heißt, daß entweder

$$Y \cdot \xi < 0 \text{ mit positiver } \mathbb{P}\text{-Wahrscheinlichkeit}$$

oder

$$\mathbb{P}(Y \cdot \xi > 0) = 0 \text{ ist.}$$

Außerdem ist ein Maß $\mathbb{P}^*$ definitionsgemäß genau dann risikoneutral, wenn

$$\bigwedge_{i=1}^{d} \mathbb{E}^*(Y^i) = 0 \text{ ist.} \tag{3.1}$$

Man zeigt nun, daß es in der Menge

$$\mathcal{Q} = \left\{ \mathbb{Q} | \mathbb{Q} \text{ äquivalent zu } \mathbb{P} \text{ mit } \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \text{ beschränkt} \right\}$$

ein risikoneutrales Maß gibt, d.h. ein Maß, welches obige Eigenschaft hat.
Zunächst sei $\mathbb{E}(|Y^i|) < \infty$ für alle $i = 1, ..., d$ und

$$\mathcal{C} := \left\{ \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(Y) | \mathbb{Q} \in \mathcal{Q} \right\} \subseteq \mathbb{R}^d.$$

Dies ist eine konvexe Teilmenge des d-dimensionalen Raumes $\mathbb{R}^d$, weil mit $y_1 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_1}(Y)$, $y_2 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_2}(Y)$ aus $\mathcal{C}$ auch jede Linearkombination $\mathbb{Q}_3 := (1-\lambda)\mathbb{Q}_1 + \lambda\mathbb{Q}_2$ für $\lambda \in [0,1]$ in $\mathcal{Q}$ und

$$y_3 = (1-\lambda)y_1 + \lambda y_2 = (1-\lambda)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_1}(Y) + \lambda\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_2}(Y) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_3}(Y)$$

in $\mathcal{C}$ enthalten ist. Da $\mathbb{P}$ in $\mathcal{Q}$ enthalten ist, ist weder $\mathcal{Q}$ noch $\mathcal{C}$ leer.

Wäre in $\mathcal{Q}$ kein risikoneutrales Maß $\mathbb{P}^*$ vorhanden, läge der Nullvektor $\vec{0}$ nicht in $\mathcal{C}$ wegen 3.1. Gemäß dem Trennungssatz für konvexe Mengen findet man dann ein $\xi \in \mathbb{R}^d$, so daß $\xi \cdot y \geq 0$ für jedes $y \in \mathcal{C}$ und außerdem ein $y_0 \in \mathcal{C}$, so daß $\xi \cdot y_0 > 0$ gilt.

Das heißt, daß für jedes $\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\xi \cdot Y) \geq 0,$$

sowie für ein spezielles $\mathbb{Q}_0 \in \mathcal{Q}$ sogar

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_0}(\xi \cdot Y) > 0 \text{ gilt.}$$

Daraus ergeben sich (wg. $\mathbb{Q}_0 \sim \mathbb{P}$) zunächst die Ungleichungen

$$\mathbb{Q}_0(\xi \cdot Y > 0) > 0 \text{ und } \mathbb{P}(\xi \cdot Y > 0) > 0.$$

Außerdem ist $\xi \cdot Y \geq 0$ $\mathbb{P}$-fast-sicher. Zum Beweis dieser Aussage setzt man

$$A := \{\omega \in \Omega | \xi \cdot Y(\omega) < 0\} \in \mathfrak{F}$$

und

$$\varphi_n : \Omega \to \mathbb{R}, \varphi_n(\omega) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \mathbb{1}_A(\omega) + \frac{1}{n} \mathbb{1}_{A^C}(\omega),\ n = 1, 2, ...$$

Diese Zufallsvariablen sind stets > 0. Die Maße

$$\mathbb{Q}_n(d\omega) := \frac{1}{\mathbb{E}(\varphi_n)} \varphi_n(\omega) \mathbb{P}(d\omega),\ n = 1, 2, ...$$

sind ebenfalls in $\mathcal{Q}$ enthalten, da die Vorfaktoren je > 0 sind. Es folgt, daß

$$0 \leq \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_n}(\xi \cdot Y) = \frac{1}{\mathbb{E}(\varphi_n)} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\varphi_n(\omega) \xi \cdot Y) \text{ gilt.}$$

Insbesondere ist

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\varphi_n(\omega) \xi \cdot Y) \geq 0$$

und mit dem Satz von Lebesgue von der majorisierten Konvergenz (s. [AE01], Seite 108 oder s. [Rud99], Seite 30) gilt

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\mathbb{1}_A \xi \cdot Y) \geq 0.$$

Da $\xi \cdot Y < 0$ auf A ist, muß A eine $\mathbb{P}$-Nullmenge sein, d.h. insbesondere, daß $\xi \cdot Y \geq 0$ $\mathbb{P}$-fast sicher.

Es folgt, daß ξ eine Arbitragemöglichkeit darstellt, was im Widerspruch zur Annahme ist. Ergo gibt es in $\mathcal{Q}$ ein risikoneutrales Maß $\mathbb{P}^* \in \mathcal{Q}$, welches definitionsgemäß eine beschränkte Dichte $Z = d\mathbb{P}^*/d\mathbb{P}$ hat.

Für den Fall, daß $\mathbb{E}(|Y|) = \infty$ gilt, zieht man sich folgendermaßen auf den 1. Fall zurück:

$$\tilde{\mathbb{P}}(\omega) := \frac{c}{1 + |Y(\omega)|} \mathbb{P}(\omega)$$

definiert mit

$$c := \frac{1}{\mathbb{E}(\frac{1}{1+|Y|})}$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß, dessen Dichte $\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} > 0$ beschränkt (wegen $Y(\omega) < \infty$) und für $\mathbb{P}$-fast alle $\omega \in \Omega$ zu $\mathbb{P}$ äquivalent ist.

Somit ist der Markt $((\Omega, \mathfrak{F}, \tilde{\mathbb{P}}), \overline{\Pi}, \overline{S})$ arbitragefrei, sobald $((\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}), \overline{\Pi}, \overline{S})$ es ist. Unter dem neuen Maß $\tilde{\mathbb{P}}$ ist der Erwartungswert

$$\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}(|Y|) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\frac{c}{1 + |Y|} \cdot |Y|) \leq c < \infty.$$

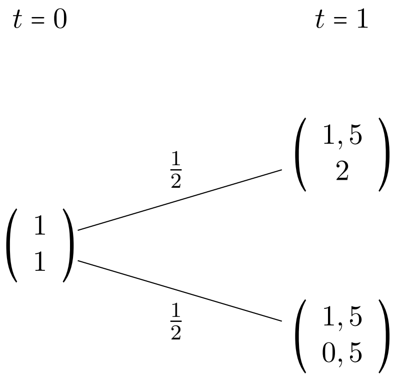
Nach Schritt 1 gibt es nun ein zu $\tilde{\mathbb{P}}$ äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^*$, welches risikoneutral ist. Dies ist dann auch zu $\mathbb{P}$ äquivalent und die Dichte ist wegen

$$\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} = \frac{d\mathbb{P}^*}{d\tilde{\mathbb{P}}} \frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} \text{ beschränkt,}$$

da $\frac{d\mathbb{P}^*}{d\tilde{\mathbb{P}}}$ es ist. ◊

3.4 Duplizierbare Forderungen und Vollständigkeit

3.4.0.1 Beispiel: Es sei ein Finanzmarktmodell mit zwei Zuständen $\Omega = \{0,1\}$ gegeben, welches außerdem aus zwei Wertpapieren besteht: ein risikofreies Papier, welches sich mit einem Satz in Höhe von $r = 50\%$ verzinst und ein risikobehaftetes Papier S, dessen Wert sich entweder verdoppelt oder halbiert:



Dieser Markt ist arbitragefrei. Um dies nachzuweisen, muß ein Maß $\mathbb{P}^* = \{p^*, q^*\}$ gefunden werden, so daß dieses lineare Gleichungssystem gelöst wird:

$$\begin{aligned} 1 &= p^* \frac{1,5}{1+r} + q^* \frac{1,5}{1+r} = p^* + q^* \\ 1 &= p^* \frac{2}{1+r} + q^* \frac{0,5}{1+r} = p^* \frac{4}{3} + q^* \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems ist $p^* = \frac{2}{3}$ und $q^* = \frac{1}{3}$. Das bedeutet, ein risikoneutrales Maß ist vorhanden und somit ist das Modell arbitragefrei.
Nun sei ein folgendermaßen definierter Zahlungsanspruch in Abhängigkeit des Werts S_1 des Wertpapiers S zum Zeitpunkt 1 gegeben:

$$C = \max(S_1 - 1, 0).$$

Zur Ermittlung des Werts oder Preises dieses Anspruchs zum Zeitpunkt $t = 0$ sucht man Koeffizienten α und β, welche das folgende Gleichungssystem lösen:

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha \frac{3}{2} + \beta \cdot 2 \\ 0 &= \alpha \frac{3}{2} + \beta \cdot \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Dies ergibt sich für $\alpha = \frac{-2}{9}$ und $\beta = \frac{2}{3}$. Der Preis ergibt sich aus den in $t = 0$ gültigen Preisen für die Wertpapiere:

$$\alpha \cdot 1 + \beta \cdot 1 = \frac{4}{9}.$$

Zum Vergleich:

$$\mathbb{E}^* \left(\frac{C}{1+r} \right) = \frac{2}{3}\frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3}\frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{4}{9}.$$

Der Preis entspricht somit dem Mittelwert der diskontierten Auszahlungen unter dem risikoneutralen Maß $\mathbb{P}^*$.

3.4.0.2 Definition (Wette, Anspruch, Option und Derivat)**:** *Sei* $((\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}), \overline{\Pi}, \overline{S})$ *ein einperiodisches Finanzmarktmodell. Dann heißt die Zufallsvariable*

$$C : \Omega \to \mathbb{R}$$

*eine **Wette, Anspruch** oder **Option** (engl. contingent claim). Gibt es eine Funktion*

$$F : \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R} \text{ mit } C(\omega) = F(\overline{S}(\omega)) \ \mathbb{P}\text{-fast sicher,}$$

*so spricht man von einem **Derivat** von S.*

3.4.0.3 Beispiel:

1. Ein Terminvertrag auf S^i (engl. Forward Contract):

   $$C = S^i - \Pi^i.$$

   Achtung, hier kann $C < 0$ gelten!

2. Verkaufsoption (Put-Option) auf S^i mit Ausübungspreis (Strike) K:

   $$C = (K - S^i)^+.$$

3. Kaufoption (Call-Option) auf S^i mit Ausübungspreis K:

   $$C = (S^i - K)^+.$$

4. Straddle auf ein Portfolio:

   $$C = |\xi \cdot \Pi - \xi \cdot S|.$$

3.4.0.4 Definition: *In einem einperiodischen Finanzmarktmodell heißt die Menge der Zufallsvariablen*

$$\mathfrak{V} := \{C : \Omega \to \mathbb{R} | \bigvee_{\overline{\xi} \in \mathbb{R}^{d+1}} C = \overline{\xi} \cdot \overline{S} \ \mathbb{P}\text{-fast sicher}\}$$

*die **Menge der duplizierbaren/replizierbaren Optionen**. Eine Option/Wette C heißt **replizierbar/duplizierbar**, falls ein C duplizierendes Portfolio vorhanden ist, derart daß*

$$\overline{\xi} \cdot \overline{S} = C \ \mathbb{P}\text{-fast sicher gilt.}$$

*Ein Finanzmarktmodell $M = ((\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}), \overline{\Pi}, \overline{S})$ heißt **vollständig**, wenn jede Option $C : \Omega \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ duplizierbar ist.*

3.4.0.5 Satz (Eindeutigkeit des Preises)**:** *Es sei* $((\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}), \overline{\Pi}, \overline{S})$ *ein arbitragefreies einperiodisches Finanzmarktmodell und* $\overline{\xi} \cdot \overline{S} \in \mathfrak{V}$*, d.h. für ein geeignetes* $\overline{\zeta} \in \mathbb{R}^{d+1}$ *ist* $\overline{\xi} \cdot \overline{S} = \overline{\zeta} \cdot \overline{S}$ *$\mathbb{P}$-fast sicher. Dann ist*

$$\overline{\xi} \cdot \overline{\Pi} = \overline{\zeta} \cdot \overline{\Pi}.$$

Für die erwartete Rendite $\mathbb{E}^*(R(v)) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}(R(v))$ *unter einem beliebigen risikoneutralen Maß* $\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}$ *gilt:*

$$\mathbb{E}^*(R(v)) = r.$$

Hierbei sei

$$R(v) = \frac{\overline{\xi} \cdot \overline{S} - \overline{\xi} \cdot \overline{\Pi}}{\overline{\xi} \cdot \overline{\Pi}}.$$

Beweis. Es gilt

$$(\overline{\xi} - \overline{\zeta}) \cdot \overline{S} = 0 \text{ } \mathbb{P}\text{-fast sicher,}$$

also auch $\mathbb{P}^*$-fast sicher für $\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}$. Damit gilt auch

$$(\overline{\xi} - \overline{\zeta}) \cdot \overline{\Pi} = (\overline{\xi} - \overline{\zeta}) \mathbb{E}^* \left(\frac{\overline{S}}{1+r} \right) = \frac{1}{1+r} \mathbb{E}^*((\overline{\xi} - \overline{\zeta}) \cdot \overline{S}) = 0.$$

Außerdem ist

$$\mathbb{E}^*(R(v)) = \frac{\mathbb{E}^*(\overline{\xi} \cdot \overline{S}) - \overline{\xi} \cdot \overline{\Pi}}{\overline{\xi} \cdot \overline{\Pi}} = \frac{(1+r) \cdot (\overline{\xi} \cdot \overline{\Pi}) - \overline{\xi} \cdot \overline{\Pi}}{\overline{\xi} \cdot \overline{\Pi}} = r.$$

◇

3.4.0.6 Definition: *Für* $v = \overline{\xi} \cdot \overline{S} \in \mathfrak{V}$ *heißt*

$$\Pi(v) := \overline{\xi} \cdot \overline{\Pi} \text{ } \textit{Preis von } v.$$

3.4.0.7 Bemerkung: Die Beziehung

$$\Pi(v) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} \left(\frac{v}{1+r} \right) \text{ für jedes } \mathbb{P}^* \in \mathcal{P}$$

führt zur risikoneutralen Preisregel für duplizierbare Ansprüche. Ihr zufolge entspricht der Preis eines duplizierbaren Anspruchs seiner mittleren (im Sinne von erwarteten) diskontierten Auszahlung unter einem beliebigen risikoneutralen Maß.

3.5 Arbitragepreise im einperiodischen Modell

3.5.0.1 Definition (Arbitragefreie Preise)**:** *Eine Zahl* Π^C *heißt* ***arbitragefreier Preis*** *für den Anspruch* C*, wenn das erweiterte Finanzmarktmodell*

$$((\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}), \widetilde{\Pi}, \widetilde{S})$$

mit

$$\widetilde{\Pi} = (\overline{\Pi}, \Pi^C) \text{ } \textit{und } \widetilde{S} = (\overline{S}, C)$$

arbitragefrei ist.

3.5.0.2 Bemerkung: Die Menge $\Pi(C)$ aller arbitragefreien Preise eines Anspruchs C ist konvex, d.h. sie ist immer ein Intervall in $\mathbb{R}$. Siehe hierzu den Beweis des 3.3.0.2. Satzes: Die Abbildung

$$\mathbb{P} \mapsto \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(C) \text{ ist affin.}$$

3.5.0.3 Satz: *Ist die Menge $\mathcal{P}$ der zu $\mathbb{P}$ äquivalenten risikoneutralen Maße nicht leer, so wird die Menge der arbitragefreien Preise des Derivats C durch die Menge*

$$\varnothing \neq \Pi(C) = \{\mathbb{E}^*\left(\frac{C}{1+r}\right) | \mathbb{P}^* \in \mathcal{P} \textit{ mit } \mathbb{E}^*(C) < \infty\} \textit{ beschrieben.}$$

Beweis. Genau dann ist Π^C ein arbitragefreier Preis für C, wenn das zugehörige (erweiterte) Finanzmarktmodell $((\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}), \widetilde{\Pi}, \widetilde{S}) = ((\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}), (\overline{\Pi}, \Pi^C), (\overline{S}, C))$ arbitragefrei ist. Dies ist gleichbedeutend damit, daß es ein risikoneutrales Maß $\mathbb{P}^*$ für diesen Finanzmarkt gibt. Hierbei gilt

$$\bigwedge_{i=0,\ldots,d+1} \mathbb{E}^*\left(\frac{\widetilde{S}^i}{1+r}\right) = \widetilde{\Pi}^i.$$

Jedes solche $\mathbb{P}^*$ ist in Bezug auf den ursprünglichen Markt risikoneutral und man hat

$$\widetilde{\Pi}^{d+1} = \Pi^C = \mathbb{E}^*\left(\frac{\widetilde{S}^{d+1}}{1+r}\right) = \mathbb{E}^*\left(\frac{C}{1+r}\right).$$

Zum Beleg, daß $\Pi(C)$ nicht leer ist, kann man o.B.d.A. zum äquivalenten Maß

$$\widetilde{\mathbb{P}}(d\omega) = \frac{c}{1+C(\omega)}\mathbb{P}(d\omega) \text{ mit}$$
$$c = \left(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\frac{1}{1+C}\right)\right)^{-1}$$

übergehen, um die Endlichkeit des Erwartungswerts

$$\mathbb{E}_{\widetilde{\mathbb{P}}}(C) = c \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\frac{C}{1+C}\right) \leq c < \infty \text{ zu gewährleisten.}$$

Nach dem 1. Hauptsatz der Wertpapierbewertung, also dem 3.3.0.2. Satz, gibt es nun ein zu $\widetilde{\mathbb{P}}$ äquivalentes risikoneutrales Maß $\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}$ mit beschränkter Dichte $Z = \frac{d\mathbb{P}^*}{d\widetilde{\mathbb{P}}}$. Insbesondere gilt dann für das risikoneutrale Maß $\mathbb{P}^*$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}(C) = \mathbb{E}_{\widetilde{\mathbb{P}}}(ZC) \leq K\mathbb{E}_{\widetilde{\mathbb{P}}}(C) < \infty$$

für eine geeignet gewählte Konstante K. Somit ist $\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}(C) \in \Pi(C)$ und $\Pi(C) \neq \varnothing$. ◊

3.5.0.4 Definition (Arbitragepreisschranken)**:** *Sei C eine Wette in einem einperiodischen Finanzmarktmodell. Dann heißen*

$$\Pi_{\inf}(C) = \inf \Pi(C)$$
$$\Pi_{\sup}(C) = \sup \Pi(C)$$

untere bzw. obere Arbitragepreisschranke *für C.*

3.5.0.5 Definition: *Ein Modell* $M = ((\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}), \overline{\Pi}, \overline{S})$ *heißt* ***nicht redundant****, wenn gilt*

$$\bigwedge_{\overline{\xi} \in \mathbb{R}^{d+1}} \overline{\xi} \cdot \overline{S} = 0 \ \mathbb{P}\text{-fast sicher } \to \overline{\xi} = 0.$$

3.5.0.6 Bemerkung: Ist ein Modell $M = ((\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}), \overline{\Pi}, \overline{S})$ redundant, dann gibt es ein $0 \neq \overline{\xi} \in \mathbb{R}^{d+1}$ mit

$$\overline{\xi} \cdot \overline{S} = 0 \ \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

Daraus folgt dann durch Umstellung des Produkts

$$S^j = \frac{-1}{\xi^j} \sum_{i \neq j} \xi^i \cdot S^i$$

für ein $\xi^j \neq 0$. Ergo kann die Zufallsvariable S^j durch die anderen Einträge von S und ξ dargestellt werden. In diesem Fall ist jedes Derivat von S als Derivat des um S_j verkürzten Wertpapiervektors darstellbar. Das entsprechende Modell $\widehat{M} = ((\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}), \widehat{\Pi}, \widehat{S})$ mit $\widehat{\Pi} = (\Pi^0, ..., \Pi^{j-1}, \Pi^{j+1}, ..., \Pi^d)$ und $\widehat{S} = (S^0, ..., S^{j-1}, S^{j+1}, ..., S^d)$ heißt ***reduziertes Modell***.

3.5.0.7 Hilfssatz: *Sei* $\overline{\xi}$ *wie oben definiert. In einem redundanten einperiodischen Modell* M *gibt es genau dann keine Arbitragegelegenheit, wenn das reduzierte Modell* $\widehat{M}$ *arbitragefrei ist und*

$$\Pi^j = -\frac{1}{\xi^j} \sum_{i \neq j} \xi^i \Pi^i \ \textit{gilt.}$$

3.5.0.8 Hilfssatz: *Ist* M *arbitragefrei und nicht redundant, gilt für* $\xi \in \mathbb{R}^d$*:*

$$\xi \cdot Y = 0 \ \mathbb{P}\text{-fast sicher } \to \xi = 0.$$

Beweis. Es sei

$$\xi \cdot Y = 0 \ \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

Dies ist gleichbedeutend dazu, daß

$$\xi \cdot S - (1 + r)\xi \cdot \Pi = 0 \text{ gilt.}$$

Erweitert man ξ zu $\overline{\xi}$ mit $\overline{\xi^0} := -\xi \cdot \Pi$ und $\overline{\xi^i} = \xi^i$ für $i > 0$, so ergibt sich:

$$\overline{\xi} \cdot \overline{S} = S \cdot \xi + (1 + r) \cdot (-\xi \cdot \Pi) = 0 \ \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

Hieraus folgt: $\overline{\xi} = 0$, sowie $\xi = 0$, da M nicht redundant war. ◇

3.5.0.9 Satz: *In einem arbitragefreien Modell* $M = ((\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}), \overline{\Pi}, \overline{S})$ *sind die Arbitragepreisschranken für die Wette* C *durch*

1. $$\Pi_{\inf}(C) = \inf_{\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}} \mathbb{E}^*(\frac{C}{1+r}) = \max\{m \geq 0 | \bigvee_{\xi \in \mathbb{R}^d} m + \xi Y \leq \frac{C}{1+r} \ \mathbb{P}\text{-fast sicher}\}$$

2. $$\Pi_{\sup}(C) = \sup_{\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}} \mathbb{E}^*(\frac{C}{1+r}) = \min\{m \geq 0 | \bigvee_{\xi \in \mathbb{R}^d} m + \xi Y \geq \frac{C}{1+r} \ \mathbb{P}\text{-fast sicher}\}$$

gegeben.

Beweis. Aussage 1 zeigt man analog zu Aussage 2.
O.B.d.A sei M nicht redundant. Sei ferner

$$\mathcal{M} := \left\{ m \geq 0 \mid \bigvee_{\xi \in \mathbb{R}^d} m + \xi \cdot Y \geq \frac{C}{1+r} \right\}.$$

Nun zeigt man, daß

$$\min \mathcal{M} = \sup \Pi(C) \text{ ist.}$$

Dazu nimmt man ein $m \in \mathcal{M}$ und $\xi \in \mathbb{R}^d$ mit

$$m + \xi \cdot Y \geq \frac{C}{1+r}.$$

Aus der Arbitragefreiheit des Markts ergibt sich, daß $\mathbb{E}^*(Y) = 0$ gilt und somit durch Anwendung des Erwartungswerts: aus

$$m = \mathbb{E}^*(m + \xi \cdot Y) \geq \mathbb{E}^* \left(\frac{C}{1+r} \right)$$

folgt, daß

$$m \geq \sup_{\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}} \mathbb{E}^* \left(\frac{C}{1+r} \right) \geq \sup \Pi(C).$$

Da $m \in \mathcal{M}$ beliebig gewählt war, gilt dies für jedes $m \in \mathcal{M}$. Das heißt dann:

$$\inf \mathcal{M} \geq \Pi_{\sup}(C).$$

Um die Gleichheit zu zeigen, wird gezeigt, daß sobald ein reelles m (nicht notwendig aus $\mathcal{M}$) echt größer als $\Pi_{\sup}(C)$ ist, es auch größer oder gleich $\inf \mathcal{M}$ ist.
Im Fall $\Pi_{\sup}(C) = \infty$ ist nichts zu zeigen. Sei daher $\Pi_{\sup}(C) < \infty$ und $m > \Pi_{\sup}(C)$, dann gibt es nach Wahl von m eine Arbitragegelegenheit im Finanzmarktmodell mit den erweiterten Vektoren $\widetilde{\Pi}$ und $\widetilde{S}$, wobei

$$\widetilde{S}^{d+1} = C \text{ und } \widetilde{\Pi}^{d+1} = m.$$

Diese Arbitragegelegenheit impliziert das Vorhandensein eines Vektors $\widetilde{\xi} = (\xi, \xi^{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+1}$ mit der Eigenschaft, daß

$$\widetilde{\xi} \cdot \widetilde{Y} = \xi \cdot Y + \xi^{d+1} \cdot \left(\frac{C}{1+r} - m \right) >^* 0. \ (*)$$

Da das ursprüngliche (also nicht erweiterte) Modell arbitragefrei war, muss die hinzugefügte Komponente einen Eintrag $\neq 0$ besitzen: $\xi^{d+1} \neq 0$. Bildet man den Erwartungswert mit einem $\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}$ in der Gleichung $(*)$, so erhält man

$$0 \leq \xi^{d+1} \cdot \left(\mathbb{E}^* \left(\frac{C}{1+r} \right) - m \right).$$

Wegen $m > \Pi_{\sup}(C)$ ist der Wert in der Klammer negativ, daher muss $\xi^{d+1} < 0$ gelten. Wird $(*)$ durch $-\xi^{d+1}$ geteilt, bekommt man

$$0 \leq \frac{-1}{\xi^{d+1}} \xi \cdot Y - \frac{C}{1+r} + m.$$

Somit ist $m \in \mathcal{M}$, insbesondere ist m größer oder gleich $\inf \mathcal{M}$.
Um zu zeigen, daß das Infimum ein Minimum darstellt, sei eine nach m konvergierende Folge

$$(m_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}^{\mathbb{N}} \text{ gegeben.}$$

Zu jedem El$\frac{t}{}$ der Folge gibt es dann ein $\xi_n \in \mathbb{R}^d$ mit

$$m_n + \xi_n \cdot Y \geq \frac{C}{1+r} \ \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

Ist

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\xi_n\| < \infty,$$

gibt es eine konvergente Teilfolge (Bolzano-Weierstraß) $\xi_{n_k} \longrightarrow \xi$. Bei Übergang zum Grenzwert ist dann

$$m + \xi \cdot Y \geq \frac{C}{1+r} \ \mathbb{P}\text{-fast sicher,}$$

d.h. $m \in \mathcal{M}$. Ist

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\xi_n\| = \infty \text{ gegeben,}$$

so würde ggf. nach Übergang zu einer Teilfolge die Folge

$$(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{\xi_n}{\|\xi_n\|} \right)_{n\in\mathbb{N}}$$

gegen ein η mit $\|\eta\| = 1$ konvergieren. Wegen

$$\frac{m_n}{\|\xi_n\|} + \eta_n \cdot Y \geq \frac{C}{(1+r)\|\xi_n\|} \ \mathbb{P}\text{-fast sicher}$$

gilt nach dem Grenzübergang

$$\eta \cdot Y \geq 0 \ \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

Da das Modell arbitragefrei ist, folgt $\eta \cdot Y = 0$ $\mathbb{P}$-fast sicher. Da das Modell nicht redundant war, gilt dann $\eta = 0$. Dies ist ein Widerspruch zu $\|\eta\| = 1$. $\diamond$

3.5.0.10 Folgerung: *In einem arbitragefreien Modell $M = ((\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}), \overline{\Pi}, \overline{S})$ ist eine Option C genau dann duplizierbar, wenn es einen eindeutigen arbitragefreien Preis für C gibt, d.h. wenn*

$$\Pi_{\sup}(C) = \Pi_{\inf}(C) \text{ ist.}$$

Ist C nicht duplizierbar, dann ist $\Pi(C)$ das offene Intervall

$$\Pi(C) = (\Pi_{\inf}(C), \Pi_{\sup}(C))$$

Beweis. „→“: Die Eindeutigkeit des Preises für eine duplizierbare Option ergibt sich aus dem 3.4.0.5.Satz.
„←“: Lt. dem 3.5.0.9. Satz gibt es nun für den eindeutigen Preis $m = \Pi_{\sup}(C) = \Pi_{\inf}(C)$ zwei Portfolien $\xi, \eta \in \mathbb{R}^{d+1}$ mit

$$(\xi - \eta) \cdot Y = m + \xi \cdot Y - (m + \eta \cdot Y) \geq \frac{C}{1+r} - \frac{C}{1+r} = 0,$$

also $(\xi - \eta) \cdot Y = 0$ $\mathbb{P}$-fast sicher, da der Markt nach Voraussetzung arbitragefrei ist. Folglich ist

$$m + \xi \cdot Y = \frac{C}{1+r} \text{ } \mathbb{P}\text{-fast sicher}$$

und C somit duplizierbar.
Man zeigt im nicht-duplizierbaren Fall, daß $\Pi_{\inf}(C) \notin \Pi(C)$ gilt. Analog verfährt man für das Supremum. Nach dem 3.5.0.9.Satz gibt es ein $\xi \in \mathbb{R}^d$, so daß

$$\Pi_{\inf}(C) + Y \cdot \xi \leq \frac{C}{1+r} \text{ } \mathbb{P}\text{-fast sicher gilt.}$$

Wegen der Unmöglichkeit, C zu duplizieren, muß auf einer Menge mit positivem Maß unter $\mathbb{P}$ die echte Ungleichheit gelten. Man nimmt nun das erweiterte Marktmodell mit $\widetilde{\Pi}^{d+1} = \Pi_{\inf}(C)$ und $\widetilde{S}^{d+1} = C$. Sei dann

$$\widetilde{\xi} := (\Pi \cdot \xi - \Pi_{\inf}(C), -\xi, 1) \in \mathbb{R}^{d+2}.$$

Somit erhält man

$$\widetilde{\xi} \cdot \widetilde{\Pi} = \Pi \cdot \xi - \Pi_{\inf}(C) - \xi \cdot \Pi + \Pi_{\inf}(C) = 0$$

und

$$\begin{aligned} \widetilde{\xi} \cdot \widetilde{S} &= (1+r) \cdot (\Pi \cdot \xi - \Pi_{\inf}(C)) - \xi \cdot S + C \\ &= (1+r)(-\xi \cdot Y + \frac{C}{1+r} - \Pi_{\inf}(C)) \qquad \geq 0 \text{ } \mathbb{P}\text{-fast sicher,} \end{aligned}$$

wobei abermals mit positiver Wahrscheinlichkeit eine echte Ungleichung gilt. Damit hat man eine Arbitragegelegenheit. Daraus ergibt sich, daß $\Pi_{\inf}(C) \notin \Pi(C)$ gilt. ◇

3.6 Der zweite Hauptsatz der Wertpapierbewertung

3.6.0.1 Satz (Zweiter Hauptsatz der Wertpapierbewertung)**:** *Es sei* $M = ((\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}), \overline{\Pi}, \overline{S})$ *ein arbitragefreies Marktmodell, dann gilt:*

$$M \textit{ ist vollständig } \leftrightarrow |\mathcal{P}| = 1,$$

das heißt es gibt genau ein zu $\mathbb{P}$ *äquivalentes risikoneutrales Maß* $\mathbb{P}^*$.

Beweis. „$\rightarrow$“: Ist das Modell vollständig, ist für jedes $A \in \mathfrak{F}$ auch die Option $C(\omega) = \mathbb{1}_A$ duplizierbar. Daraus ergibt sich der Preis von C für jedes Element $\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}$ durch

$$\Pi(C) = \mathbb{E}^*\left(\frac{C}{1+r}\right) = \mathbb{E}^*(\mathbb{1}_A)\frac{1}{1+r}.$$

Daher gilt stets die Gleichung

$$\mathbb{P}^*(A) = \Pi(C)(1+r),$$

welche $\mathbb{P}^*$ vollständig festlegt.
„$\leftarrow$“: Wenn $\mathcal{P}$ nur aus dem Element $\mathbb{P}^*$ besteht und C eine Option ist, dann liefert der 3.5.0.3. Satz, daß die Menge der Preise dieser Option durch die Menge

$$\emptyset \neq \Pi(C) = \left\{\mathbb{E}^*\left(\frac{C}{1+r}\right) | \mathbb{P}^* \in \mathcal{P}, \mathbb{E}^*\left(\frac{C}{1+r}\right) < \infty\right\} \text{ beschrieben wird.}$$

Da die Menge $\mathcal{P}$ nur ein Element hat, folgt daraus, daß $\mathbb{E}^*(C) < \infty$, sowie daß

$$\Pi(C)$$

einelementig ist. Nach der 3.5.0.10. Folgerung ist C duplizierbar. $\diamond$

4 Mehrperiodenmodelle zur Wertpapierbewertung

4.0.0.1 Definition: *Es sei ein Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ *und eine geordnete und endliche Indexmenge* $\mathcal{T}$ *gegeben.*

- *Unter einer* ***Filtrierung*** *von* Ω *versteht man eine Familie von* σ*-Algebren* $\{\mathfrak{F}_i\}_{i\in\mathcal{T}}$*, für die*
$$\bigwedge_{i=0,\dots,|\mathcal{T}|-1} \mathfrak{F}_i \subset \mathfrak{F}_{i+1} \text{ gilt.}$$
- *Eine Familie von Zufallsvariablen* $\{X_i\}_{i\in\mathcal{T}}$*, so daß*
$$X_i : (\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}) \to (E, \mathfrak{E})$$
mit Werten in einem meßbaren Raum $(E, \mathfrak{E})$ *sind, heißt* ***stochastischer Prozeß****. Bezeichnet wird er mit* $(X_i)_{i\in\mathcal{T}}$ *oder* $X_\bullet$*.*

4.0.0.2 Definition (Mehrperiodenmodell)**:** *Ein* d***-dimensionales mehrperiodisches Finanzmarktmodell***
$$M = ((\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathcal{T}}, \mathbb{P}), (S_t)_{t\in\mathcal{T}})$$
besteht aus

- *einem Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$
- *einer Menge von Handelszeitpunkten* $\mathcal{T} = \{0, \dots, N\}$
- *einer Filtrierung* $(\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathcal{T}}$ *von* $(\Omega, \mathfrak{F})$
- *und einem stochastischen Prozeß*
$$(S_t)_{t\in\mathcal{T}} : (\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}^{d+1}_{\geq 0},$$
bei dem S_t *stets* $\mathfrak{F}_t$*-meßbar ist.*

4.0.0.3 Bemerkung: Der o.g. stochastische Prozeß kann in seine Komponenten zerlegt werden:
$$(S_t)_{t\in\mathcal{T}} = (S_t^0, \dots, S_t^d)_{t\in\mathcal{T}}.$$
Der Vektor der Preise zum Zeitpunkt t ist dann
$$S_t = (S_t^0, \dots, S_t^d).$$

4.0.0.4 Generalvoraussetzung: Es sei

- $\mathcal{T} = \{0, ..., N\}$ eine diskrete Menge von äquidistanten Zeitpunkten.
- $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_N$, $\mathfrak{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$.
- $|\Omega| < \infty$ und $\mathbb{P}(\{\omega\}) > 0$ für alle $\omega \in \Omega$.
- $(S_t^0)_{t\in\mathcal{T}}$ stets positiv, d.h. für jedes t aus $\mathcal{T}$ sei $S_t^0 > 0$ $\mathbb{P}$-fast sicher. Dieses Wertpapier heißt „risikofreies Wertpapier", i.d.R. einigt man sich darüber hinaus auf die Konvention $S_0^0 = 1$. Wenn der ***risikofreie Zins*** innerhalb einer Periode r ist, dann ist das risikofreie Wertpapier zum Zeitpunkt t genau $S_t^0 = (1+r)^t$ wert.

4.0.0.5 Definition: • *Ein stochastischer Prozeß $(\xi_i)_{i\in\mathcal{T}}$ heißt **adaptiert an** $\{\mathfrak{F}_i\}_{i\in\mathcal{T}}$, wenn*

$$\bigwedge_{i\in\mathcal{T}} \xi_i \ \mathfrak{F}_i\text{-meßbar ist.}$$

- *Ein Prozeß $(\xi_t)_{t\in\mathcal{T}}$ heißt **vorhersehbarer** Prozeß, wenn*

$$\bigwedge_{i=0,\dots,d} \xi_0^i \ \mathfrak{F}_0 - \text{meßbar ist und}$$

$$\bigwedge_{i=0,\dots,d} \bigwedge_{t\geq 1} \xi_t^i \ \mathfrak{F}_{t-1} - \text{meßbar ist.}$$

4.0.0.6 Bemerkung: Der reziproke Wert des risikofreien Papiers

$$\beta_t = \frac{1}{S_t^0}$$

ist der Diskontierungsfaktor, welcher den anfänglichen Zeitwert eines Euro darstellt: dieser Betrag muss zum Zeitpunkt 0 in das risikofreie Wertpapier S_t^0 investiert werden, um zum Zeitpunkt t einen Euro zur Verfügung zu haben. Die Papiere $S_t^1, ..., S_t^d$ heißen ***riskante Anlagen***.

4.0.0.7 Definition: *$(S_t^0)_{t\in\mathcal{T}}$ wird als **Numéraire** bezeichnet. Diese Anlage steht in der Regel für eine sichere Investition, deren Eigenschaften (s. Generalvoraussetzung) es erlauben, sie durch Einführung des Vektors*

$$(\widetilde{S}_t)_{t\in\mathcal{T}}, \widetilde{S}_t^k = \frac{S_t^k}{S_t^0},$$

*welcher **relativer Wertpapierprozeß** genannt wird, als Bezugsgröße der anderen Wertpapiere $(S_t^k)_{t\in\mathcal{T}}$ zu nutzen.*

4.1 Selbstfinanzierende Handelsstrategien

4.1.0.1 Definition (Handelsstrategie)**:** *Unter einer **Handelsstrategie** versteht man einen $\mathbb{R}^{d+1}$-wertigen, vorhersehbaren stochastischen Prozeß*

$$(\xi_t)_{t\in\mathcal{T}}.$$

*Sie wird **selbstfinanzierend** genannt, wenn stets*

$$\xi_t \cdot S_t = \xi_{t+1} \cdot S_t \text{ gilt.}$$

4.1.0.2 Bemerkung: Die Selbstfinanzierbarkeit bedeutet, daß an jedem Zeitpunkt t, an dem das Portfolio umgeschichtet wird, kein Wertverlust (genauer: keine Wertänderung) stattfindet (z.B. in Form von Transaktionskosten, Entnahmen aus - /Zugaben zum Portfolio o.Ä.). Die Vorhersehbarkeit bedeutet, daß die Positionen ξ_t^k in den einzelnen Wertpapieren zum Zeitpunkt t bereits zum Zeitpunkt $t-1$ entschieden und bis zum Zeitpunkt t gehalten werden.

4.1.0.3 Definition (Portfoliowert): *Der **Wert** $V_t(\xi)$ **des Portfolios** zum Zeitpunkt t ist durch das Skalarprodukt*

$$V_t(\xi) = \sum_{i=0}^{d} \xi_t^i \cdot S_t^i \text{ gegeben.}$$

Dessen auf den Zeitpunkt 0 diskontierter Wert ist

$$\widetilde{V}_t(\xi) = \beta_t(\xi_t \cdot S_t) = \xi_t \cdot \widetilde{S}_t,$$

wobei $\beta_t = \frac{1}{S_t^0}$ und $\widetilde{S} = (1, \beta_t S_t^1, ..., \beta_t S_t^d)$ den Vektor der diskontierten Preise darstellt.

4.1.0.4 Bemerkung: Die Aussage

$$\xi_t \cdot S_t = \xi_{t+1} S_t$$

ist gleichbedeutend mit

$$\xi_{t+1}(S_{t+1} - S_t) = \xi_{t+1} S_{t+1} - \xi_t S_t$$

bzw. mit der Gleichung

$$V_{t+1}(\xi) - V_t(\xi) = \xi_{t+1}(S_{t+1} - S_t).$$

Zum Zeitpunkt $t+1$ hat das Portfolio den Wert $\xi_{t+1} S_{t+1}$ und $\xi_{t+1} S_{t+1} - \xi_{t+1} S_t$ ist der Nettogewinn, welcher durch die Preisentwicklung zwischen den Zeitpunkten t und $t+1$ entstanden ist. Das heißt: Wertänderungen bei selbstfinanzierenden Handelsstrategien geschehen lediglich aufgrund von Preisänderungen der Wertpapiere.

4.1.0.5 Hilfssatz: *Für eine Handelsstrategie ξ sind folgende Aussagen gleichwertig:*

1. *ξ ist selbstfinanzierend.*

2. *Für jeden Zeitpunkt $t \in \{1, ..., N\}$ ist*

$$V_t(\xi) = V_0(\xi) + \sum_{j=1}^{t} \xi_j \cdot \Delta S_j.$$

   Hierbei stehe ΔS_j für die (vektorielle) Differenz $S_j - S_{j-1}$.

3. *Für jeden Zeitpunkt $t \in \{1, ..., N\}$ gilt die diskontierte Variante von (2), d.h.*

$$\widetilde{V}_t(\xi) = V_0(\xi) + \sum_{j=1}^{t} \xi_j \cdot \Delta \widetilde{S}_j,$$

   wobei $\Delta \widetilde{S}_j = \widetilde{S}_j - \widetilde{S}_{j-1} = \beta_j S_j - \beta_{j-1} S_{j-1}$.

Beweis. Die Gleichwertigkeit der ersten beiden Aussagen ergibt sich unmittelbar aus der 4.1.0.4. Bemerkung.
Die Gleichwertigkeit der ersten und dritten Aussage ergibt sich, da

$$\xi_t S_t = \xi_{t+1} S_t \leftrightarrow \xi_t \tilde{S}_t = \xi_{t+1} \tilde{S}_t \text{ gilt.}$$

◇

4.1.0.6 Satz: *Für jeden vorhersehbaren Prozeß* $((\xi_t^1, ..., \xi_t^d))_{t\in\mathcal{T}}$*, sowie jede* $\mathfrak{F}_0$*-meßbare Zufallsvariable* V_0*, gibt es genau einen vorhersehbaren Prozeß* $(\xi_t^0)_{t\in\mathcal{T}}$*, dergestalt, daß die Strategie* $\xi = (\xi^0, ..., \xi^d)$ *selbstfinanzierend ist und den Startwert* V_0 *hat.*

Beweis. Die Bedingung der Selbstfinanzierung kann nach 4.1.0.5 so formuliert werden:

$$\begin{aligned}\widetilde{V}_t(\xi) &= \xi_t^0 + \xi_t^1 \widetilde{S}_t^1 + \cdots + \xi_t^d \widetilde{S}_t^d \\ &= V_0 + \sum_{j=1}^{t} (\xi_j^1 \Delta \widetilde{S}_j^1 + \cdots + \xi_j^d \Delta \widetilde{S}_j^d)\end{aligned}$$

Diese Gleichung definiert (rekursiv) (ξ_t^0) für $t \in \mathcal{T}$. Die Vorhersehbarkeit ergibt sich durch die Umformung

$$\begin{aligned}\xi_t^0 = V_0 &+ \sum_{j=1}^{t-1} (\xi_j^1 \Delta \widetilde{S}_j^1 + \cdots + \xi_j^d \Delta \widetilde{S}_j^d) \\ &+ (\xi_t^1 (-\widetilde{S}_{t-1}^1) + \cdots + \xi_t^d (-\widetilde{S}_{t-1}^d)),\end{aligned}$$

da die Terme allesamt $\mathfrak{F}_{t-1}$-meßbar sind. ◇

4.2 Zulässige Handelsstrategien

Für eine Handelsstrategie gilt möglicherweise $\xi_t^i < 0$. In diesem Fall sagt man, man sei in der entsprechenden Position S_t^i ***short*** (s. 1. Kapitel) gegangen, d.h. man hat sich zur Zeit t genau ξ_t^i mal das Wertpapier S^i, das dann den Wert S_t^i hat, geliehen. Mit der folgenden Definition verlangt man, daß der Wert des Portfolios in toto stets positiv bleibt.

4.2.0.1 Definition: *Eine Handelsstrategie* (ξ_t) *heißt* ***zulässig****, wenn sie selbstfinanzierend ist und* $V_t(\xi) \geq 0$ *für jedes* $t \in \{1, ..., N\}$ *gilt.*

Dies schränkt die Leihmöglichkeiten (d.h. die Finanzierung des Portfolios auf Kreditbasis) deutlich ein.

4.2.0.2 Definition: *Eine* ***Arbitragestrategie*** *ist eine zulässige Handelsstrategie* ξ*, deren Startwert bei 0 liegt und deren Endwert* $V_N(\xi)$ *nicht 0 ist.*

4.3 Martingale und Arbitragegelegenheiten

4.3.0.1 Definition: *Ein adaptierter Prozeß* $(M_t)_{t\in\mathcal{T}}$ *reellwertiger Zufallsvariablen ist ein*

- ***Martingal****, wenn* $\mathbb{E}(M_{t+1}|\mathfrak{F}_t) = M_t$ *für jedes* $t \leq N-1$ *gilt.*

- ***Supermartingal***, *wenn* $\mathbb{E}(M_{t+1}|\mathfrak{F}_t) \leq M_t$ *für jedes* $t \leq N-1$ *gilt.*

- ***Submartingal***, *wenn* $\mathbb{E}(M_{t+1}|\mathfrak{F}_t) \geq M_t$ *für jedes* $t \leq N-1$ *gilt.*

Diese Definition lässt sich auf den mehrdimensionalen Fall ausweiten, indem man die obigen (Un-)gleichungen für die einzelnen Komponenten fordert. Im Zusammenhang mit finanzmathematischen Überlegungen bedeutet die Tatsache, daß für ein Wertpapier S^i die Preisentwicklung $(S_t^i)_{t\in\mathcal{T}}$ ein Martingal ist lediglich, daß zum Zeitpunkt t der zum Zeitpunkt $t+1$ erwartete Preis S_{t+1}^i dem zum Zeitpunkt t gültigen Preis S_t^i entspricht. Leicht ableiten lassen sich nun folgende Aussagen:

1. $(M_t)_{t\in\mathcal{T}}$ ist genau dann ein Martingal, wenn für jedes $0 \leq j \leq N-t$ auch
$$\mathbb{E}(M_{t+j}|\mathfrak{F}_t) = M_t \text{ gilt.}$$

2. Ist $(M_t)_{t\in\mathcal{T}}$ ein Martingal, so gilt für jedwedes $t \in \mathcal{T}$: $\mathbb{E}(M_t) = \mathbb{E}(M_0)$.

3. Die Summe zweier Martingale ist wieder ein Martingal.

4. Die Aussage unter 3. gilt auch für Super- und Submartingale.

4.3.0.2 Hilfssatz: *Es sei ein Martingal* $(M_t)_{t\in\mathcal{T}}$ *und eine in bezug auf eine Filtrierung* $(\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathcal{T}}$ *vorhersehbare Folge* $(H_t)_{t\in\mathcal{T}}$ *von Zufallsvariablen gegeben. Bezeichne* $\Delta M_t = M_t - M_{t-1}$, *dann ist die durch die Rekursionsbedingungen*

$$\begin{aligned} X_0 &= H_0 M_0 \\ X_t &= H_0 M_0 + H_1 \Delta M_1 + \cdots + H_t \Delta M_t \end{aligned}$$

definierte Folge $(X_t)_{t\in\mathcal{T}}$ *von Zufallsvariablen in bezug auf die Filtrierung* $(\mathfrak{F}_t)_{t\in\mathcal{T}}$ *ein Martingal.*

4.3.0.3 Bemerkung: $(X_t)_{t\in\mathcal{T}}$ heißt ***Martingaltransformierte*** von $(M_t)_{t\in\mathcal{T}}$ durch $(H_t)_{t\in\mathcal{T}}$. Konsequenz dieses Hilfssatzes ist, daß der Erwartungswert eines Portfolios mit einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie dem ursprünglichen Wert des Portfolios entspricht, wenn die diskontierten Wertentwicklungsprozesse $(\widetilde{S}_t^i)_{t\in\mathcal{T}}$ Martingale sind.

Beweis. $(X_t)_{t\in\mathcal{T}}$ ist konstruktionsbedingt eine adaptierte Folge. Außerdem gilt für $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{t+1} - X_t|\mathfrak{F}_t) &= \mathbb{E}(H_{t+1}(M_{t+1} - M_t)|\mathfrak{F}_t) \\ &= H_{t+1}\mathbb{E}(M_{t+1} - M_t|\mathfrak{F}_t) \text{ da } H_{t+1}\ \mathfrak{F}_t\text{-meßbar ist} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Daher gilt die Martingaleigenschaft

$$\mathbb{E}(X_{t+1}|\mathfrak{F}_t) = \mathbb{E}(X_t|\mathfrak{F}_t) = X_t.$$

◊

4.3.0.4 Hilfssatz: *Eine adaptierte Folge $(M_t)_{t\in\mathcal{T}}$ reellwertiger Zufallsvariablen ist genau dann ein Martingal, wenn*

$$\mathbb{E}\left(\sum_{t=1}^{N} H_t \Delta M_t\right) = 0$$

für jede vorhersehbare Folge $(H_t)_{t\in\mathcal{T}}$ ist.

Beweis. Ist $(M_t)_{t\in\mathcal{T}}$ ein Martingal, dann ist die Folge, welche durch die Rekursionsgleichungen

$$X_0 = 0$$
$$X_t = \sum_{i=1}^{t} H_i \Delta M_i \text{ gegeben ist,}$$

für jeden vorhersehbaren Prozeß $(H_t)_{t\in\mathcal{T}}$ ebenfalls ein Martingal. Daher ist $\mathbb{E}(X_N) = \mathbb{E}(X_0) = 0$.

Andersherum ist, wenn für $t \in \{1, ..., N-1\}$ die Folge $(H_t)_{t\in\mathcal{T}}$ durch $H_i = 0$ für $i \neq t+1$ und $H_i = \mathbb{1}_A$ für $i = t+1$ und ein beliebiges $A \in \mathfrak{F}_t$ gewählt wird, die Folge $(H_t)_{t\in\mathcal{T}}$ vorhersehbar. Andererseits ist

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N} H_i \Delta M_i\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_A(M_{t+1} - M_t)\right) = 0.$$

Da dies für alle $A \in \mathfrak{F}_t$ gilt, gilt stets

$$\mathbb{E}(M_{t+1}|\mathfrak{F}_t) = M_t,$$

was die Martingaleigenschaft von $(M_t)_{t\in\mathcal{T}}$ belegt. ◇

4.4 Arbitragefreie Finanzmärkte

4.4.0.1 Satz (1. Hauptsatz der Wertpapierbewertung)**:** *Der Markt ist genau dann arbitragefrei, wenn es zumindest ein zu $\mathbb{P}$ äquivalentes Maß $\mathbb{P}^*$ dergestalt gibt, daß bezüglich dieses Maßes die Prozesse der diskontierten Wertentwicklung der einzelnen Wertpapiere Martingale sind.*

Beweis. „⇐“: Wenn ein Maß $\mathbb{P}^*$ die o.g. Eigenschaften hat, erhält man für eine selbstfinanzierende Handelsstrategie ξ aufgrund des 4.1.0.5. Satzes die folgende Wertentwicklung des Portfolios:

$$\widetilde{V}_t(\xi) = \widetilde{V}_0(\xi) + \sum_{j=1}^{t} \xi_j \Delta \widetilde{S}_j.$$

Nach dem 4.3.0.2. Satz ist $(\widetilde{V}_t(\xi))_{t\in\mathcal{T}}$ dann ein Martingal bzgl. des Maßes $\mathbb{P}^*$. Daher hat das Portfolio unter diesem Maß stets dieselbe Erwartung:

$$\mathbb{E}^*(\widetilde{V}_N(\xi)) = \mathbb{E}^*(\widetilde{V}_0(\xi)).$$

Ist die Handelsstrategie zulässig und der Ausgangswert des Portfolios 0, dann ist auch $\mathbb{E}^*(\widetilde{V}_N(\xi)) = 0$ und $\widetilde{V}_N(\xi) \geq 0$ aufgrund der Zulässigkeit der Handelsstrategie. Wegen $\mathbb{P}^*(\{\omega\}) > 0$ für $\omega \in \Omega$ ist jedoch $\widetilde{V}_N(\xi) = 0$.

„$\rightarrow$": Die andere Richtung ist ungleich schwerer zu zeigen. Es sei die Menge Γ durch

$$\Gamma = \{X : \Omega \to \mathbb{R}_{\geq 0} | X \text{ Zufallsvariable mit } \mathbb{P}(X > 0) > 0\} \text{ gegeben.}$$

Dies ist eine konvexe Teilmenge im Vektorraum der reellwertigen Zufallsvariablen. Der Markt ist genau dann arbitragefrei, wenn für jede zulässige Handelsstrategie mit Ausgangswert 0, d.h. $\widetilde{V}_0(\xi) = 0$ folgt, daß die reellwertige Zufallsvariable $\widetilde{V}_N(\xi)$ nicht in Γ enthalten ist: $\widetilde{V}_N(\xi) \notin \Gamma$.

Für eine vorhersehbare Handelsstrategie $(\xi_t^1, ..., \xi_t^d)$ setze

$$\widetilde{G}_t(\xi) = \sum_{j=1}^{t} (\xi_j^1 \Delta \widetilde{S}_j^1 + ... + \xi_j^d \Delta \widetilde{S}_j^d),$$

welches den Prozeß $(\widetilde{G}_t(\xi))_{t \in \mathcal{T}}$ der angehäuften Gewinne darstellt, welcher durch die Handelsstrategie $(\xi_t^1, ..., \xi_t^d)$ verwirklicht wird. Nach dem 4.1.0.6. Satz kann sie auf eindeutige Weise zu einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie $((\xi_t^0, ..., \xi_t^d))_{t \in \mathcal{T}}$ mit Ausgangswert 0 erweitert werden. $\widetilde{G}_t(\xi)$ ist dann deren diskontierter Prozeß zur Zeit t und - wegen der Arbitragefreiheit - folgt aus der Eigenschaft $\widetilde{G}_t(\xi) \geq 0$ für jedes $t = 1, ..., N$, daß $\widetilde{G}_N(\xi) = 0$ gilt. Der nun folgende Hilfssatz belegt, daß $\widetilde{G}_N(\xi)$ selbst dann nicht in Γ enthalten ist, wenn in den Zeiten zwischen 0 und N der Prozeß $\widetilde{G}_t(\xi)$ negativ ist.

4.4.0.2 Hilfssatz: *Ist ein Markt arbitragefrei, dann genügt jeder vorhersehbare Prozeß* $(\xi^1, ..., \xi^d)$ *der Bedingung*

$$\widetilde{G}_N(\xi) \notin \Gamma.$$

Beweis. Durch Widerspruch. Nimmt man an, es gelte $\widetilde{G}_N(\xi) \in \Gamma$. Ist für jedwedes $t \in \{1, ..., N\}$ auch $\widetilde{G}_t(\xi) \geq 0$, so ist der Markt nicht arbitragefrei. Ist darunter eine Zufallsvariable, z.B. $\widetilde{G}_i(\xi)$, welche negative Werte annimmt, so setze

$$t := \sup\{i \mid \mathbb{P}(\widetilde{G}_i(\xi) < 0) > 0\}.$$

Der Definition von t zufolge ist $t \leq N - 1$ sowie $\mathbb{P}(\widetilde{G}_t(\xi) < 0) > 0$ und für jedes $i > t$ gilt $\widetilde{G}_i(\xi) \geq 0$. Es lässt sich nun ein weiterer Prozeß konstruieren, nämlich:

$$\psi_j(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } j \leq t \\ \mathbb{1}_A(\omega)\xi_j(\omega) & \text{wenn } j > t \end{cases}$$

Hierbei sei A das Ereignis $\{\widetilde{G}_t(\xi) < 0\}$. Wegen der Vorhersehbarkeit von ξ und weil A $\mathfrak{F}_t$-meßbar ist, ist ψ auch vorhersehbar. Außerdem gilt

$$\widetilde{G}_j(\psi) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } j \leq t \\ \mathbb{1}_A(\widetilde{G}_j(\xi) - \widetilde{G}_t(\xi)) & \text{wenn } j > t. \end{cases}$$

Daher ist $\widetilde{G}_j(\psi) \geq 0$ für jedes $j \in \{1, ..., N\}$ und $\widetilde{G}_N(\psi) > 0$ auf A. Dies widerspricht der angenommenen Arbitragefreiheit des Markts und zeigt die Aussage. $\diamond$

Es sei

$$\mathcal{V} = \{\widetilde{G}_N(\xi) \mid \xi \text{ vorhersehbarer Prozeß}\}.$$

Dies ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^{\Omega}$, der Menge der Zufallsvariablen $\Omega \to \mathbb{R}$. Nach dem Hilfssatz Nr. 4.4.0.2 ist die Schnittmenge von $\mathcal{V}$ mit Γ leer. Somit sind die konvexe Menge Γ und der Unterraum $\mathcal{V}$ disjunkt. $\mathcal{V}$ ist somit ebenfalls zur Menge $\mathcal{K} = \{X \in \Gamma | \sum_{\omega} X(\omega) = 1\}$, welche nicht nur konvex, sondern auch kompakt und in Γ enthalten ist, disjunkt. Der Satz 4.3.0.4 besagt dann, daß es $(\lambda(\omega))_{\omega\in\Omega}$ mit

$$\sum_{\omega} \lambda(\omega) X(\omega) > 0 \text{ für jedes } X \in \mathcal{K} \tag{4.1}$$

$$\sum_{\omega} \lambda(\omega) \widetilde{G}_N(\xi)(\omega) = 0 \text{ für jedes vorhersehbare } \xi \text{ gibt.} \tag{4.2}$$

Aus 4.1 folgt, daß für jedes $\omega \in \Omega$ $\lambda(\omega) > 0$ gelten muß. Daher ist das durch

$$\mathbb{P}^*(\{\omega\}) = \frac{\lambda(\omega)}{\sum_{\omega'\in\Omega} \lambda(\omega')}$$

definierte Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^*$ zu $\mathbb{P}$ äquivalent.

Außerdem bedeutet 4.2, daß für jedweden vorhersehbaren Prozeß (ξ_t) mit Werten in $\mathbb{R}^d$ die unter $\mathbb{P}^*$ gegebene Erwartung verschwindet:

$$\mathbb{E}^*\left(\sum_{j=1}^{N} \xi_j \Delta \widetilde{S}_j\right) = 0.$$

Für jedes $i \in \{1, ..., d\}$ und jede vorhersehbare Folge (ξ_t^i) in $\mathbb{R}$ ist dann

$$\mathbb{E}^*\left(\sum_{j=1}^{N} \xi_j^i \Delta \widetilde{S}_j^i\right) = 0.$$

Wegen Satz 4.3.0.4 sind dann die diskontierten Prozesse $(\widetilde{S}_t^1), ..., (\widetilde{S}_t^d)$ Martingale. $\diamond$

4.5 Vollständigkeit und der 2. Hauptsatz der Wertpapierbewertung

Europäische Optionen sind bereits aus Abschnitt 2.3.4 bekannt. Der Wert einer Kaufoption auf das erste Wertpapier zum Ausübungspreis K zum Zeitpunkt N ist

$$h = (S_N^1 - K)^+,$$

während der Wert einer Verkaufsoption zu dieser Zeit bei gleichem Ausübungspreis bei

$$h = (K - S_N^1)^+ \text{ liegt.}$$

Somit hängt der Preis dieser Optionen lediglich von der Lage zum Zeitpunkt N ab. Bei anderen Optionen gibt es Konstellationen, bei denen der Wert h zum Ausübungszeitpunkt auch von den Werten des Wertpapiers an bestimmten Zeitpunkten während der Laufzeit der Option abhängt, wie z.B. bei den sog. ***asiatischen Optionen***, bei denen der durchschnittliche Wert des Papiers im Preis berücksichtigt wird.

4.5.0.1 Definition: *Eine Option mit Ausübungszeitpunkt N, welche durch die Zufallsvariable h dargestellt wird, heißt* ***simulierbar, duplizierbar*** *oder* ***erreichbar/darstellbar****, wenn es eine zulässige Strategie ξ gibt, deren Wert zum Zeitpunkt N dem Wert von h entspricht.*

4.5.0.2 Bemerkung: In einem arbitragefreien Markt ist die Duplizierbarkeit einer Option h gleichbedeutend mit dem Vorhandensein einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie, deren Wert zum Endzeitpunkt N dem Wert von h entspricht. Denn: ist ξ eine selbstfinanzierende Handelsstrategie und $\mathbb{P}^*$ ein zu $\mathbb{P}$ äquivalentes Maß derart, daß unter diesem Maß die diskontierten Wertprozesse Martingale sind, dann ist - unter dem Maß $\mathbb{P}^*$ - $\widetilde{V}_t(\xi)$ ein Martingal. Daher gilt auch

$$\widetilde{V}_t(\xi) = \mathbb{E}^*(\widetilde{V}_N(\xi)|\mathfrak{F}_t) \geq 0,$$

wenn $\widetilde{V}_N(\xi) \geq 0$.

4.5.0.3 Definition: *Ein Markt heißt* ***vollständig****, wenn jede Option mit Ausübungszeitpunkt N duplizierbar ist.*

4.5.0.4 Bemerkung: Anders als bei der Arbitragefreiheit ist das Konzept der Vollständigkeit nicht ad hoc einleuchtend. Der Sinn dabei besteht darin, daß in diesen Märkten die Preisbestimmung von Optionen besonders einfach ist, da ihre Replikation exakt (d.h. nicht lediglich approximativ) gelingt (Vollständigkeit des Markts).

4.5.0.5 Satz (2. Hauptsatz der Wertpapierbewertung)**:** *Ein arbitragefreier Markt ist genau dann vollständig, wenn es genau ein zu $\mathbb{P}$ äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^*$ gibt, bezüglich dessen die diskontierten Preisprozesse der Wertpapiere Martingale darstellen.*

4.5.0.6 Bemerkung: Es wird sich herausstellen, daß $\mathbb{P}^*$ ***das*** Werkzeug zur Bestimmung von Optionspreisen ist.

Beweis. „$\rightarrow$“: Ist der Markt vollständig, ist jede positive, $\mathfrak{F}_N$-meßbare Zufallsvariable h durch $V_N(\xi)$ mit einer geeignet gewählten selbstfinanzierenden Handelsstrategie ξ darstellbar. Weil sie selbstfinanzierend ist, hat man

$$\frac{h}{S_N^0} = \widetilde{V}_N(\xi) = V_0(\xi) + \sum_{j=1}^{N} \xi_j \Delta \widetilde{S}_j.$$

Sind $\mathbb{P}_1$ und $\mathbb{P}_2$ zwei Wahrscheinlichkeitsmaße, bezüglich derer die Preisentwicklungsprozesse der Wertpapiere Martingale sind, dann ist $(\widetilde{V}_t(\xi))_{t\in\mathcal{T}}$ sowohl hinsichtlich $\mathbb{P}_1$ als auch hinsichtlich $\mathbb{P}_2$ ein Martingal. Daraus ergibt sich für $i = 1, 2$

$$\mathbb{E}_i(\widetilde{V}_N(\xi)) = \mathbb{E}_i(V_0(\xi)) = V_0(\xi).$$

Die letzte Gleichung ergibt sich aus der Tatsache, daß $\mathfrak{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$ ist. Daher hat man

$$\mathbb{E}_1\left(\frac{h}{S_N^0}\right) = \mathbb{E}_2\left(\frac{h}{S_N^0}\right)$$

und da h beliebig wählbar war, ist $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_2$ auf der σ-Algebra $\mathfrak{F}_N = \mathfrak{F}$.

„$\leftarrow$": Ist der Markt zwar arbitragefrei, aber nicht vollständig, so gibt es eine Zufallsvariable $h \geq 0$, die nicht replizierbar ist. Bezeichnet $\widetilde{\mathcal{V}}$ den Raum der Zufallsvariablen der Gestalt

$$U_0 + \sum_{t=1}^{N} \xi_t \Delta \widetilde{S}_t$$

mit einer $\mathfrak{F}_0$-meßbaren Zufallsvariable U_0 und einem vorhersehbaren $\mathbb{R}^d$-wertigen Prozeß $((\xi_t^1, ..., \xi_t^d))_{t\in\mathcal{T}}$. Aus Satz 4.1.0.6 und Bemerkung 4.5.0.2 geht hervor, daß die Zufallsvariable h/S_N^0 nicht in $\widetilde{\mathcal{V}}$ enthalten ist. Daher ist $\widetilde{\mathcal{V}}$ ein echter Unterraum des Raums aller reellwertigen Zufallsvariablen $\mathbb{R}^\Omega$. Ist $\mathbb{P}^*$ ein zu $\mathbb{P}$ äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß, bzgl. dessen die diskontierten Preisentwicklungsprozesse der Wertpapiere Martingale sind und versieht man den Raum $\mathbb{R}^\Omega$ mit dem Skalarprodukt $(X, Y) \mapsto \mathbb{E}^*(XY)$, dann gibt es eine nicht-verschwindende Zufallsvariable X, welche zu $\widetilde{\mathcal{V}}$ orthogonal ist. Setzt man dann

$$\mathbb{P}^{**}(\{\omega\}) = \left(1 + \frac{X(\omega)}{2\|X\|_\infty}\right) \mathbb{P}^*(\{\omega\})$$

mit der gewöhnlichen Supremumsnorm $\|X\|_\infty = \sup_{\omega\in\Omega} |X(\omega)|$. Somit wird auf Ω ein weiteres zu $\mathbb{P}$ äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß, welches von $\mathbb{P}^*$ verschieden ist (beachte: einerseits ist $\mathbb{E}^*(X) = 0$, andererseits ist somit sowohl die Summe

$$\sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{P}^{**}(\{\omega\}) = 1$$

als auch

$$(1 + \frac{X(\omega)}{2\|X\|_\infty}) \geq 0,$$

weshalb $\mathbb{P}^{**}(\{\omega\}) \geq 0$ ist und somit auch $\mathbb{P}^{**}(\{\omega\}) > 1$ ausgeschlossen wird), definiert. Des Weiteren gilt für jeden vorhersehbaren Prozeß $((\xi_t^1, ..., \xi_t^d))_{t\in\mathcal{T}}$

$$\mathbb{E}^{**}\left(\sum_{t=1}^{N} \xi_t \Delta \widetilde{S}_t\right) = 0.$$

Aufgrund des 4.3.0.4. Hilfssatzes ist dann $(\widetilde{S}_t)_{t\in\mathcal{T}}$ ein $\mathbb{P}^{**}$-Martingal. $\diamond$

5 Das Binomialmodell

Mit

$$S_t^0 = (1+r)^t \text{ für } t \in \mathcal{T},\ r > -1$$

sei eine risikolose Anlage gegeben. Außerdem stelle

$$S^1 = S$$

eine riskante Anlage mit Rendite

$$R_t = \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} \in \{a, b\} \text{ mit } -1 < a < b \text{ dar.}$$

Das heißt

$$S_t = (1+a)S_{t-1} \text{ oder } S_t = (1+b)S_{t-1}.$$

Der Ereignisraum ist durch

$$\Omega = \{-1, +1\}^T \text{ gegeben.}$$

Es gilt

$$S_t = S_0 \prod_{k=1}^{t} (1 + R_k)$$

und der diskontierte Preisprozeß ist

$$X_t := \frac{S_t}{S_t^0} = S_0 \prod_{k=1}^{t} \frac{1+R_k}{1+r}.$$

Die zugehörigen σ-Algebren sind

$$\mathfrak{F}_t = \sigma(S_1, ..., S_t) = \sigma(X_1, ..., X_t) \text{ für } 1 \le t \le N-1$$

bzw.

$$\mathfrak{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\} \text{ sowie } \mathfrak{F}_N = \mathfrak{P}(\Omega).$$

Wenn für $\omega \in \Omega$ stets

$$\bigwedge_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) > 0$$

gilt, spricht man von einem ***Binomialmodell*** bzw. einem ***Cox-Ross-Rubinstein-Modell***.

5.0.0.1 Satz: *Das Binomialmodell ist genau dann arbitragefrei, wenn $a < r < b$ gilt. Es ist dann vollständig und es gibt ein eindeutig bestimmtes, zu $\mathbb{P}$ äquivalentes risikoneutrales Maß $\mathbb{P}^*$, welches dadurch charakterisieret ist, daß die Zufallsvariablen $R_1, ..., R_N$ unter $\mathbb{P}^*$ unabhängig mit gemeinsamer Verteilung*

$$\mathbb{P}^*(R_t = b) = p^* = \frac{r-a}{b-a} \text{ für } t \in \mathcal{T}$$

sind.

Beweis. $\mathbb{Q}$ ist genau dann ein risikoneutrales zu $\mathbb{P}$ äquivalentes Maß auf $(\Omega, \mathfrak{F})$, wenn der diskontierte Preisprozeß $(X_t)_{t\in\mathcal{T}}$ ein $\mathbb{Q}$-Martingal ist, wobei

$$X_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X_{t+1}|\mathfrak{F}_t) = X_t\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\frac{1+R_{t+1}}{1+r}|\mathfrak{F}_t)\ \mathbb{Q}-\text{fast sicher für } t \in \mathcal{T}.$$

Dies ist gleichbedeutend mit der Bedingung

$$r = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(R_{t+1}|\mathfrak{F}_t) = b\mathbb{Q}(R_{t+1} = b|\mathfrak{F}_t) + a \cdot (1 - \mathbb{Q}(R_{t+1} = b|\mathfrak{F}_t)),\ \text{das heißt}$$

$$\mathbb{Q}(R_{t+1} = b|\mathfrak{F}_t) = p^* = \frac{r-a}{b-a}.$$

Da

$$\mathbb{Q}(R_{t+1} = b|\mathfrak{F}_t) \in (0,1)\text{gelten muss, ist notwendigerweise } r \in (a,b).$$

Außerdem ist nach Konstruktion des Modells R_{t+1} von $\mathfrak{F}_t$ unabhängig, weshalb

$$\mathbb{Q}(R_{t+1} = b) = \frac{r-a}{b-a}\ \text{gilt.}$$

◇

5.1 Explizite Berechnungen

5.1.0.1 Satz: *Für $N \in \mathbb{N}$ sei*

$$Z_N = \sum_{k=1}^{N} Y_k^N$$

die Summe identisch verteilter unabhängiger Zufallsvariablen $Y_1^N, ..., Y_N^N$ und für ein $K_N \in \mathbb{R}$ gelte

$$\bigwedge_{k\le N} |Y_k^N| \le K_N \text{ für } K_N \longrightarrow 0\ (N \longrightarrow \infty).$$

Außerdem gelte

$$\mu_N := \sum_{k=1}^{N} \mathbb{E}(Y_k^N) \longrightarrow \mu \in \mathbb{R}\ (N \longrightarrow \infty)$$

sowie

$$\sigma_N^2 := Var(Z_N) = \sum_{k=1}^{N} Var(Y_k^N) \longrightarrow \sigma^2\ (N \longrightarrow \infty).$$

Dann konvergiert die Folge $(Z_N)_{N\in\mathbb{N}}$ schwach gegen eine standardnormalverteilte Zufallsvariable $Z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Beweis. $(Z_N)_{N\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann schwach gegen Z, wenn dessen Laplacetransformierte $\Lambda_N(t) := \mathbb{E}(e^{tZ_N})$ für jedes $t > 0$ gegen $\Lambda(t) := \mathbb{E}(e^{tZ})$ konvergiert. Nun ist

$$\Lambda_N(t) = \mathbb{E}(e^{\sum_{i=1}^{N} Y_i^N}) = \mathbb{E}(\prod_{i=1}^{N} e^{tY_i^N}) = \prod_{i=1}^{N} \mathbb{E}(e^{tY_i^N}) = (\lambda_N(t))^N \text{ mit}$$

$$\lambda_N(t) = \mathbb{E}(e^{tY_i^N}) = \mathbb{E}(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k (Y_i^N)^k}{k!}) = 1 + t\mathbb{E}(Y_i^N) + \frac{t^2}{2}\mathbb{E}((Y_i^N)^2) + ...$$

Die Komponenten der Reihenentwicklung berechnet man einzeln:

$$\mathbb{E}(Y_1^N) = \frac{1}{N}\mathbb{E}(Z_N) = \frac{\mu_N}{N}$$

$$\mathbb{E}((Y_1^N)^2) = Var(Y_1^N) + \left(\mathbb{E}(Y_1^N)\right)^2 = \frac{\sigma_N^2}{N} + \left(\frac{\mu_N}{N}\right)^2 = \frac{\sigma_N^2}{N} + O(\frac{1}{N^2}).$$

Analog erhält man

$$|\mathbb{E}((Y_1^N)^k)| \leq (K_N)^{k-2}\frac{2\sigma^2}{N}.$$

Die Entwicklung von $\lambda_N(t)$ sieht dann folgendermaßen aus:

$$\lambda_N(t) = 1 + \frac{t\mu_N + \frac{t^2}{2}\sigma_N^2}{N} + \underbrace{O(\frac{1}{N^2}) + O(K_N^3\left(\frac{\sigma_N}{N}\right)^3)}_{\frac{\rho_N}{N}}$$

$$(\lambda_N(t))^N = \left(1 + \frac{t\mu_N + \frac{t^2}{2}\sigma_N^2 + \rho_N}{N}\right)^N.$$

Nun ist

$$\rho_N \longrightarrow 0(N \longrightarrow \infty)$$
$$\sigma_N \longrightarrow \sigma(N \longrightarrow \infty)$$
$$\mu_N \longrightarrow \mu(N \longrightarrow \infty)$$

Somit ergibt sich für $\lambda_N(t)$ die Konvergenz:

$$(\lambda_N(t))^N \longrightarrow e^{t\mu + \frac{t^2}{2}\sigma^2} = \mathbb{E}(e^{tZ}) \text{ für } Z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2).$$

◇

Ist mit $N > 0$ der Ausübungszeitpunkt einer Option gegeben, so wird das Intervall $[0, N]$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $\Delta_n = \frac{N}{n}$ in n gleich große Teile eingeteilt. Der (stetige) risikofreie Zins betrage

$$r_n = e^{r\Delta_n} - 1$$

und die Wertentwicklung der riskanten Anlage S werde durch

$$\frac{S_i^{(n)}}{S_{i-1}^{(n)}} = (1 + R_i^{(n)}) = \begin{cases} e^{r\Delta_n + \sigma\sqrt{\Delta_n}} & \text{mit einem festen Parameter } \sigma, \\ e^{r\Delta_n - \sigma\sqrt{\Delta_n}} & \text{sehr vereinfachend „Volatilität“ genannt,} \end{cases}$$

beschrieben. Der Preis dieser Anlage zu Beginn ist $S_0 = S_0^{(n)}$ und die Wertentwicklung bis zum Zeitpunkt N ist $S_n^{(n)} = S_0 \prod_{i=1}^n (1 + R_i^{(n)})$. Dessen logarithmische Rendite im i. Teilintervall ist

$$Z_i^{(n)} := ln\frac{S_i^{(n)}}{S_{i-1}^{(n)}} = ln(1 + R_i^{(n)})$$

und die Möglichkeiten der Wertentwicklung

$$a = a_n = e^{r\Delta_n - \sigma\sqrt{\Delta_n}}$$
$$b = b_n = e^{r\Delta_n + \sigma\sqrt{\Delta_n}}$$

liefern für $n \in \mathbb{N}$ ein risikoneutrales Maß $\mathbb{P}^*$, welches durch die Wahrscheinlichkeiten

$$p_n^* = \frac{r-a}{b-a} = \frac{1-e^{-\sigma\sqrt{\Delta_n}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta_n}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta_n}}}$$
$$q_n^* = 1 - p_n^*$$

5.1.0.2 Hilfssatz: *Es gilt:*

$$p_n^* = \frac{1}{2} - \frac{\sigma}{4}\sqrt{\Delta_n} + O(\Delta_n).$$

Beweis. Taylorentwicklung nach Δ_n. ◇

5.1.0.3 Hilfssatz: *Unter* $\mathbb{P}_n^*$ *ist*

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}_n^*}(Z_i^{(n)}) = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot \Delta_n + O(\Delta_n^{3/2})$$
$$Var_{\mathbb{P}_n^*}(Z_i^{(n)}) = \sigma^2\Delta_n + O(\Delta_n^{3/2})$$

Beweis. Taylorentwicklung und der 5.1.0.2. Hilfssatz. ◇

5.1.0.4 Satz: *Für* $n \longrightarrow \infty$ *konvergiert* $ln(S_n^{(n)})$ *unter* $\mathbb{P}_n^*$ *schwach gegen eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert* $\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)N + ln(S_0)$ *und Varianz* $\sigma^2 N$.

Beweis. 5.1.0.1. Satz zusammen mit dem 5.1.0.2. und 5.1.0.3. Hilfssatz. ◇

5.1.0.5 Hilfssatz: *Für* $n \longrightarrow \infty$ *konvergiert der Preis einer europäischen Call-Option gegen*

$$e^{-rN}\mathbb{E}\left((e^{Z_N} - K)^+\right), \text{ wobei } Z_N \sim \mathcal{N}\left((r - \frac{\sigma^2}{2})N + ln(S_0), \sigma^2 N\right)$$

Beweis.

$$C_0^n = e^{-rN}\mathbb{E}\left((e^{ln(S_n^{(n)})} - K)^+\right)$$

Eine direkte Anwendung des 5.1.0.1. Satzes ist nicht möglich, da die Zufallsvariable Z_N ggf. nicht beschränkt ist. Daher wird die Put-Call-Parität (s. 2.3.4.7 Satz) genutzt:

$$P_0^n = e^{-rN}\mathbb{E}((K - e^{ln(S_n^{(n)})})^+) \longrightarrow e^{-rN}P_0 := \mathbb{E}((K - e^{Z_N})^+)$$
$$e^{Z_N} \sim \mathcal{LN}\left(ln(S_0) + (r - \frac{\sigma^2}{2})N, \sigma^2 N\right)$$

und
$$S_0^{(n)} = S_0 = e^{-rN}\mathbb{E}\left(e^{Z_N}\right).$$
Gemäß der Put-Call-Parität erhält man
$$\begin{aligned}
C_0^n = S_0 - Ke^{-rN} + P_0^n &\longrightarrow S_0 - Ke^{-rN} + P_0 \; (n \longrightarrow \infty) \text{ und} \\
P_0 + S_0 - e^{-rN}K &= e^{-rN}(\mathbb{E}\left((K - e^{Z_N})^+\right) + e^{rN}S_0 - K) \\
&= e^{-rN}\mathbb{E}\left((K - e^{Z_N})^+ + e^{Z_N} - K\right) \\
&= e^{-rN}\mathbb{E}\left((e^{Z_N} - K)^+\right)
\end{aligned}$$

◇

5.1.0.6 Satz (Preis einer europäischen Kaufoption nach Black-Scholes)**:** *Gegeben sei eine Folge von Binomialmodellen mit*
$$\begin{aligned}
1 + b_n &= e^{r\Delta_n + \sigma\sqrt{\Delta_n}}, \\
1 + a_n &= e^{r\Delta_n - \sigma\sqrt{\Delta_n}}, \\
\Delta_n &= \frac{N}{n},
\end{aligned}$$

und einem festen Zinssatz r. Dann konvergiert der Preis einer Call-Option zu
$$C_0 = S_0\Phi(d_+) - Ke^{-rN}\Phi(d_-)$$
mit
$$\begin{aligned}
d_+ &= \frac{ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)N}{\sigma\sqrt{N}} \quad \textit{und} \\
d_- &= d_+ - \sigma\sqrt{N} = \frac{ln(S_0/K) + (r - \sigma^2/2)N}{\sigma\sqrt{N}}
\end{aligned}$$

Beweis. Nach dem 5.1.0.5 Hilfssatz ist zu zeigen, daß
$$C_0 = e^{-rN}\mathbb{E}\left((e^{Z_N} - K)^+\right) \text{ gilt.}$$
Es sei
$$\alpha := \frac{e^{rN}}{\sqrt{2\pi\sigma^2 N}} \text{ und } \mu = ln(S_0) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)N$$
sowie
$$\overline{\sigma} = \sigma\sqrt{N}.$$
Dann ist
$$\begin{aligned}
e^{-rN}\mathbb{E}((e^{Z_N} - K)^+) &= \alpha \cdot \int_{\mathbb{R}} (e^x - K)^+ e^{-\frac{((x-\mu)^2}{2\overline{\sigma}^2}} dx \\
&= \alpha \underbrace{\int_{ln(K)}^{\infty} e^x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\overline{\sigma}^2}} dx}_{I.} - K \cdot \alpha \underbrace{\int_{ln(K)}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\overline{\sigma}^2}} dx}_{II.}
\end{aligned}$$

Der Intergrand von $I.$ ist

$$\begin{aligned} e^{x-\frac{(x-\mu)^2}{2\overline{\sigma}^2}} &= e^{-\frac{-2\overline{\sigma}^2 x + x^2 - 2\mu x + \mu^2}{2\overline{\sigma}^2}} \\ &= e^{-\frac{(x-(\mu+\overline{\sigma}^2))^2 + (\mu^2 - (\mu+\overline{\sigma}^2))^2}{2\overline{\sigma}^2}} \\ &= e^{-\frac{(x-(ln(S_0)+(r+\frac{\sigma^2}{2})N))^2}{2\sigma^2 N} + ln(S_0) + rN}. \end{aligned}$$

Und somit erhält man für das Intergral

$$\begin{aligned} I. &= \frac{S_0}{\sqrt{2\pi\sigma^2 N}} \int_{ln(K)}^{\infty} e^{-\frac{(x-(ln(S_0)+(r+\frac{\sigma^2}{2})N))^2}{2\sigma^2 N}} dx \\ &= S_0 \cdot \mathbb{P}(\widetilde{Z} > ln(K)) \\ &= S_0 \cdot \mathbb{P}\left(\frac{\widetilde{Z} - ln(S_0) - (r + \frac{\sigma^2}{2})N}{\sigma N} > -d_+ \right) \\ &= S_0 \cdot (1 - \Phi(-d_+)) \\ &= S_0 \cdot \Phi(d_+). \end{aligned}$$

mit einer standardnormalverteilten Zufallsvariable $\widetilde{Z}$ mit Erwartungswert

$$ln(S_0) + (r + \frac{\sigma^2}{2})N$$

und Varianz

$$\sigma^2 N.$$

Das Integral $II.$ berechnet man analog. ◊

5.1.0.7 Bemerkung: Dies ist ein zentrales Ergebnis, welches Black und Scholes aus ihrer Theorie für zeitstetige Modelle erhalten haben. Für diese Theorie wurde 1997 der Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften verliehen. Wie auch hier zeigt sie, dass sich durch stetes Umschichten (im Gegensatz zum besprochenen Modell allerdings nicht nur zu endlich vielen Zeitpunkten, sondern zu unendlich vielen - daher ***zeitstetiges*** Modell genannt) zwischen einer risikofreien Anlage B, deren Zeitwert sich durch eine exponentielle Verzinsung

$$B_t = B_0 \cdot e^{rT}$$

beschreiben lässt und einer risikobehafteten Anlage S, welche durch eine geometrische Brownsche Bewegung

$$S_t = S_0 \cdot e^{(\mu - \frac{1}{2}\cdot\sigma^2)\cdot t + \sigma\cdot W_t}$$

dargestellt wird (W_t steht für einen Wiener Prozeß), eine Option replizieren lässt, sofern einige (starke!) Voraussetzungen an den modellierten Markt gegeben sind.

Eine dieser Voraussetzungen ist, dass der Markt arbitragefrei ist.

5.1.0.8 Folgerung: *Der Preis eines Put ist gegeben durch*

$$abcd$$

Einsatz von Derivaten in der Welt:

5.1.0.9 Beispiel (Codere, s. [The18])**:** Codere ist eine spanische Spielefirma, die 2018 nicht im Stande war, ihr geschuldetes Geld den Gläubigern zurückzuzahlen. Ihre Anleihen waren auf dem Markt knapp über der Hälfte des Nominalwerts dotiert. Die Private-Equity-Gesellschaft Blackstone bot der Firma 100 Mio. $ an, allerdings hatte die Sache einen Haken: Blackstone hatte zuvor Kreditderivate (CDS) auf Codere gekauft, welche 19 Mio. $ einbringen würden, sollte Codere seine Schulden nicht rechtzeitig zahlen. Codere verzögerte daraufhin die Zahlung seiner Kreditzinsen, so dass technisch gesehen ein „Kreditausfall“ erzeugt wurde. Somit lieh einerseits Blackstone Codere Geld, andererseits blieb Codere zahlungsfähig und beide waren zufrieden - zu Lasten der Gegenpartei(en) der Kreditderivate.

Dieses Geschäft verblaßt im Vergleich zu einer ähnlichen Trickserei Blackstones im Jahr 2017: Für 333 Mio. $ erwarb es Kreditausfallderivate (CDS) auf Hovnanian, eine amerikanische „Construction“-Firma. Im Gegenzug für eine billige Finanzierung sollte Hovnanian einen Ausfall der den Derivaten zugrundeliegenden Krediten auslösen. Da es Hovnanian besser ging als Codere, wollte es seine Reputation nicht aufs Spiel setzen und man einigte sich darauf, dass eine Tochtergesellschaft Anleihen Hovnanians erwarb und dann genau die Anleihen „ausfielen“ (d.h. ggf. erst verspätet Zinszahlungen erhielten), welche durch die Tochtergesellschaften gehalten wurden. Hierdurch wurde das Kreditereignis der Derivate ausgelöst.

Ein weiteres „Problem“ bestand darin, dass CDS in der Regel die Differenz des Marktwerts einer Anleihe zum Nominalwert auszahlen, da diese Differenz als gute Näherung zur Kürzung der Auszahlungen im Fall einer Pleite gelten. Nun war es aber so, dass der Marktwert der Anleihen von Hovnanian nahe am Nominalwert lag. Dies hätte einen winzigen Auszahlungsbetrag der Derivate zur Folge gehabt. Man „half“ sich also folgendermaßen: Die neu emittierten Anleihen Hovnanians wurden zu phänomenal günstigen Zinssätzen (5 %) und sehr langer Laufzeit (22 Jahre) emittiert, was dazu führte, dass diese deutlich unter pari auf dem Markt bewertet wurden. Somit war auch der Preis der Anleihen entsprechend niedrig im Vergleich zum Nominalwert, als das Ausfallereignis der Derivate provoziert wurde.

6 Wahrscheinlichkeitstheorie

6.0.0.1 Definition: *Es sei ein Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ *und eine geordnete Indexmenge* $\mathcal{T}$ *gegeben.*

- *Unter einer* ***Filtration*** *von* Ω *versteht man eine Familie von* σ*-Algebren* $\{\mathfrak{F}_i\}_{i\in\mathcal{T}}$*, für die*

$$\bigwedge_{i=0,\ldots,|\mathcal{T}|-1} \mathfrak{F}_i \subset \mathfrak{F}_{i+1} \text{ gilt.}$$

- *Eine Familie von Zufallsvariablen* $\{X_i\}_{i\in\mathcal{T}}$*, so daß*

$$X_i : (\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}) \to (E, \mathfrak{E})$$

  mit Werten in einem meßbaren Raum $(E, \mathfrak{E})$ *sind, heißt* ***stochastischer Prozeß****. Bezeichnet wird er mit* $(X_i)_{i\in\mathcal{T}}$ *oder* $X_\bullet$*.*

- $\{X_i\}_{i\in\mathcal{T}}$ *heißt* ***adaptiert an*** $\{\mathfrak{F}_i\}_{i\in\mathcal{T}}$*, wenn*

$$\bigwedge_{i\in\mathcal{T}} X_i\ \mathfrak{F}_i\text{-meßbar ist.}$$

- *Ein stochastischer Prozeß* $(\xi_i)_{i\in\mathcal{T}}$ *heißt* ***vorhersehbar****, wenn*

$$\bigwedge_{i\in\mathcal{T}} X_i\ \mathfrak{F}_{i-1}\text{-meßbar ist.}$$

7 Analysis

7.0.0.1 Satz: *Ist C eine abgeschlossene konvexe und nicht-leere Menge in $\mathbb{R}^n$, welche nicht den Ursprung enthält, so gibt es eine Linearform ξ auf dem Raum $\mathbb{R}^n$ und ein $\alpha > 0$ so daß*

$$\bigwedge_{x \in C} \xi(x) \geq \alpha \text{ gilt.}$$

Insbesondere hat die Hyperebene, welche die Nullstellenmenge dieser Linearform definiert, keinen Schnittpunkt mit C.

Beweis. ...einzufügen... ◊

7.0.0.2 Satz (Minkowski)**:** *Es seien K eine konvexe und kompakte Menge und V ein Untervektorraum im Vektorraum $\mathbb{R}^n$. Wenn V und K disjunkt sind, gibt es eine Linearform ξ auf $\mathbb{R}^n$, so daß diese Bedingungen erfüllt werden:*

1. $$\bigwedge_{x \in K} \xi(x) > 0$$

2. $$\bigwedge_{x \in V} \xi(x) = 0.$$

Beweis. Die Menge

$$C = K \setminus V = \{x \in \mathbb{R}^n | \bigvee_{(x,y) \in K \times V}, x = y - z\} \text{ ist konvex, abgeschlossen und}$$

enthält nicht den Ursprung $0 \in \mathbb{R}^n$. Gemäß dem 7.0.0.1 Satz kann man eine Linearform ξ auf $\mathbb{R}^n$ konstuieren, so daß für $\alpha > 0$ gilt:

$$\bigwedge_{x \in C} \xi(x) \geq \alpha.$$

Daher ist für jedes $y \in K$ und $z \in V$

$$\xi(y) - \xi(z) \geq \alpha. \tag{7.1}$$

Für $z = 0$ erhält man $\xi(y) \geq \alpha$ für jedes $y \in K$. Hält man $y \in K$ fest und wendet die Ungleichung 7.1 auf Vielfache λz von z an (für beliebige reellwertige λ), so erhält man $\xi(z) = 0$. ◊

Inhaltsverzeichnis

8 Literaturverzeichnis

[AE01] H. Amann and J. Escher. *Analysis III.* Birkhäuser Verlag, 2001.

[Fö11] Föllmer, H. and Schied, A. *Stochastic Finance.* De Gruyter, 2011.

[Fre09] Frey, R. and Schmidt, T. Finanzmathematik I. 2009.

[Hul15] J. Hull. *Optionen, Futures und andere Derivate.* Pearson, 8. edition, 2015.

[Lam12] Lamberton, D. and Lapeyre, B. *Introduction au calcul stochastique appliquÃ© Ã la finance.* ellipses, 3. edition, 2012.

[Rud99] W. Rudin. *Reelle und Komplexe Analysis.* Oldenbourg Verlag, 1999.

[The18] The Economist. Where it's due. *The Economist*, 427:62, 2018.

[v. 13] v. Renesse, M. Finanzmathematik I. 2013.

Stichwortverzeichnis