

Übungen zur Elementaren Zahlentheorie

-2. Blatt-

Prof. Dr. K. Wingberg
J. Bartels

SS 2007
abzugeben bis Montag, den 30. April 2007

1 . Aufgabe (6 Punkte):

Jan und Peter spielen das folgende Spiel:

Sie suchen sich eine natürliche Zahl n größer als null aus. Anschließend denkt sich Peter eine natürliche positive Zahl m , die kleiner ist als n . Diese soll Jan finden. Dazu darf Jan Peter irgendeine Zahl k nennen, woraufhin Peter ihm im Gegenzug sagt, ob $m + k$ prim ist oder nicht. Zeige, daß Jan Peters Zahl nach höchstens $n - 1$ Fragen herausbekommen hat.

2 . Aufgabe (6 Punkte):

Bestimme alle Zahlentripel $(a, b, c) \in \mathbb{N}_{>1}^3$ mit der Eigenschaft:

a) „das Produkt zweier $+1$ ist durch die dritte teilbar.“

b) „das Produkt zweier -1 ist durch die dritte teilbar.“

Hinweis:

Bei der a) kommt $(2, 3, 7)$ und bei der b) $(2, 3, 5)$ heraus.

3 . Aufgabe (6 Punkte):

Man zeige:

Hat man 39 aufeinander folgende natürliche Zahlen, dann gibt es darunter mindestens eine, deren Quersumme (alles geschieht in Dezimalschreibweise) durch elf zu teilen ist.

Gilt das auch für 38?

4 . Aufgabe (6 Punkte):

Sei $P \in \mathbb{Z}[X]$ ein nichtkonstantes Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten. Man zeige, daß es unendlich viele Primzahlen p gibt, so daß die Gleichung $P(x) \equiv 0 \pmod{p}$ mindestens eine Lösung hat.

Hinweis: Man gucke sich die Menge der Primzahlen an, für die diese Gleichung gilt und nehme an, diese sei endlich.