Übungen zur Elementaren Zahlentheorie

-10. Blatt-

Prof. Dr. K. Wingberg SS 2007
J. Bartels abzugeben bis Montag, den 2. Juli 2007 um elf Uhr

http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~bartels/Uebungen.htm

Name:
Übungsleiter:

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
Punkte					

1 . Aufgabe (6 Punkte):
Es sei K der imaginärquadratische Zahlkörper mit Diskriminante $D < 0$ und $D \equiv 0, 1 (mod\ 4)$.
a) Zeige: Jedes Ideal I ist folgendermaßen zu schreiben

$$\delta(a\mathbb{Z} + \frac{b+\sqrt{D}}{2}\mathbb{Z}) \text{ mit } a, b, \delta \in \mathbb{Z}, a > 0.$$

und

$$b^2 \equiv D(mod\ 4a), |b| \leq a.$$

Umgekehrt stellt eine solche Menge ein Ideal I dar, für dessen Norm $\mathfrak{N}(I) = a\delta^2$ gilt und dessen Schnitt mit $\mathbb{Z}$ durch $I \cap \mathbb{Z} = \delta a \mathbb{Z}$ beschrieben wird.
b) Es sei $c := \frac{b^2-D}{4a}$. Zeige, daß

$$(c, \frac{-b+\sqrt{D}}{2})^{-1}.I$$

ein Hauptideal ist.

1 Tip:

a) benutze Satz 5.2.4 und zeige, daß ein Ideal ein Modul ist, von dem man einen Erzeuger aus $\mathbb{Z}$ wählen kann, das macht das rechnen einfacher.
Dann zeigt man, daß die Idealeigenschaft gleichbedeutend ist damit, daß wenn man diese Erzeuger mit $\frac{D+\sqrt{D}}{2}$ multipliziert, man wiederum in dem Erzeugnis landet.
Der Rest ist Rechnung.
b) Schreibe c aus und forme um, man braucht das gebrochene Ideal nicht unbedingt auszurechnen!

2 . Aufgabe (6 Punkte):
a) Folgere aus obiger Aufgabe, daß jede Idealklasse ein Ideal

$$J = a\mathbb{Z} + \frac{b+\sqrt{D}}{2}\mathbb{Z} \text{ mit}$$

|b|$\leq a \leq c := \frac{b^2-D}{4a}$

enthält und daß man $b \geq 0$ annehmen kann, für den Fall, daß eines der obigen„$\leq$“ ein „$=$“ ist.
b) Zeige, daß $\mathfrak{N}(J) = a \leq \sqrt{|D|/3}$ gilt und vergleiche diesen Wert mit der oberen Schranke für die Norm aus Theorem 6.6.11 aus dem Buch von Schmidt.

2 Tip

a) Man nimmt sich ein Ideal aus der 1. Aufgabe und sucht dann ein Ideal, daß sich von dem ursprünglichen nur um ein Hauptideal unterscheidet. Dies sollte dann für a, b, c (s.o.) geringere Werte haben.
b) Berechne die Norm und nutze die Ungleichungen aus Teil a).

3 . Aufgabe (6 Punkte) (Fortsetzung)**:**
a) Zeige für $x, y \in \mathbb{Q}$ die folgende Gleichung:

$$N(ax + \frac{b+\sqrt{D}}{2}y) = a(ax^2 + bxy + cy^2)$$

und folgere daraus: $a^2 = \min_{x \in J\setminus\{0\}} N(x)$.
b) Ein Ideal $J = a\mathbb{Z} + \frac{b+\sqrt{D}}{2}\mathbb{Z}$, daß obigen Punkt erfüllt (d.h. daß $a^2 = \min_{x\in J\setminus\{0\}} N(x)$), heißt „reduziert“. Zeige, daß es in jeder Idealklasse genau ein reduziertes Ideal gibt, indem man zunächst zeigt, daß $ac = \min_{x\in J\setminus\mathbb{Z}} N(x)$ gilt.
c) Folgere aus obigem den

2.0.1 Satz: *Ist K ein quadratischer Zahlkörper der Diskriminante $D < 0$, dann sind die Idealklassen aus $\mathcal{O}_K$ in Bijektion mit den Tripeln (a, b, c), so daß $b^2 - 4ac = D, |b| \leq a \leq c$ und $b \geq 0$, wenn $|b| = a$ oder $a = c$.*

3 Tip

a) ausrechnen
b) Nehmt aus der 1. Aufgabe den Teil b) und kombiniert ihn mit Teil a) der 2. Aufgabe. Die Eindeutigkeit behandelt man wie gewohnt: Man nehme an, man hätte zwei Ideale J, die das geforderte erfüllen.

4 . Aufgabe (6 Punkte):
Berechne die Anzahl der Idealklassen von

$$\mathbb{Q}(\sqrt{-d}) \text{ für } d = 7, 15 \text{ und } 19.$$

4 Tip

s. 3. Aufgabe!