

Übungen zur Elementaren Zahlentheorie

-7. Blatt-

Prof. Dr. K. Wingberg
J. Bartels

SS 2007
abzugeben bis Montag, den 11. Juni 2007 um elf Uhr

<http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~bartels/Uebungen.htm>

Übungsleiter:

<i>Aufgabe</i>	1	2	3	4	Σ
<i>Punkte</i>					

1 . Aufgabe (6 Punkte):

- a) Zeige, daß $x^2 + dy^2 = \pm 1$ für quadratfreie Zahlen $d > 1$ endlich viele ganzzahlige Lösungen hat. Welche?
- b) Zeige, daß $x^2 - dy^2 = \pm 1$ für quadratfreie Zahlen $d > 1$ unendlich viele ganzzahlige Lösungen hat. Und zwar mache man dies unter der Annahme, man hätte bereits eine solche Lösung vorliegen, die nicht von der Form $(x, y) = (\pm 1, 0)$ ist!

2 . Aufgabe (6 Punkte):

- a) Man finde in $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ die kleinsten Zahlen $a + b\sqrt{d} > 1$, für die $N(a + b\sqrt{d}) = \pm 1$ gilt, und zwar für $d = 7, 10, 11$ und 14 .
- b) Man finde in $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ die kleinsten Zahlen $\frac{1}{2}(a + b\sqrt{d}) > 1$, für die $N(a + b\sqrt{d}) = \pm 4$ gilt, und zwar für $d = 5, 13, 17$ und 41 .

3 . Aufgabe (6 Punkte):

Finde die Tripel (p, q, r) von Primzahlen, so daß der Term

$$p^q + p^r$$

eine Quadratzahl ergibt.

4 . Aufgabe (6 Punkte):

Finde alle ganzen Zahlen n, k, l, m mit $l > 1$ und

$$(1 + n^k)^l = 1 + n^m.$$