Übungen zur Elementaren Zahlentheorie

-6. Blatt-

Prof. Dr. K. Wingberg
J. Bartels

SS 2007
abzugeben bis Montag, den 4. Juni 2007 um elf Uhr

http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~bartels/Uebungen.htm

Übungsleiter:

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
Punkte					

---

1 . Aufgabe (6 Punkte):
a) Zeige, daß $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ kein faktorieller Ring ist.
b) Auf wieviele Arten kann man eine Primzahl p als Summe zweier Quadrate schreiben?

2 . Aufgabe (6 Punkte):
Bezeichnet man mit $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ die Menge

$$\{a + bi\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Z}\},$$

dann zeige man,
a) daß für jedes Paar komplexer Zahlen (x, y) in $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$, wobei $y \neq 0$ vorausgesetzt sei, es ein Tupel (q, r) von Elementen aus $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ gibt derart, daß $x = qy + r$ und $|r| < |y|$ gilt.
b) Zeige, daß sich jede Zahl $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ auf eindeutige Weise schreiben läßt als Produkt

$$x = \pm \prod_{1 \leq i \leq n} p_i^{k_i},$$

wobei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $k_i \in \mathbb{N}$ für jedes $i \in \{1, ..., n\}$ und $p_i \in \mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ für $i \in \{1, ..., n\}$ irreduzibel sind.

3 . Aufgabe (6 Punkte) (Fortsetzung)**:**
Finde alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung

$$y^2 + 2 = x^3.$$

Hinweis: Man führe die Normabbildung N ein: $N(a + bi\sqrt{2}) := a^2 + 2b^2$. Mit dieser lassen sich die invertierbaren Elemente aus $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ charakterisieren, was es wiederum ermöglicht,

die „Primfaktorzerlegung“ induktiv zu zeigen. Die Eindeutigkeit kopiert man von demselben Beweis für $\mathbb{Z}$.
$z = i\sqrt{2}$ ist irreduzibel und die Zahlen $y - z, y + z$ haben keine echten, d.h. nicht-invertierbaren gemeinsamen Teiler. Desweiteren sind $y - z$ sowie $y + z$ Kubikzahlen in $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$.

4 . Aufgabe (6 Punkte):
a) Finde alle rechtwinkligen Dreiecke mit ganzzahligen Seitenlängen, deren Fläche ein Quadrat (d.h. in $\mathbb{Z}^2$) sind.
b) Finde alle ganzen Zahlen mit

$$x^4 - y^4 = z^2$$