Übungen zur Elementaren Zahlentheorie

-10. Blatt-

Prof. Dr. K. Wingberg SS 2007
J. Bartels abzugeben bis Montag, den 2. Juli 2007 um elf Uhr

http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~bartels/Uebungen.htm

Name:
Übungsleiter:

$Aufgabe$	1	2	3	4	$\sum$
$Punkte$					

1 . Aufgabe (6 Punkte):
Es sei K der imaginärquadratische Zahlkörper mit Diskriminante $D < 0$.
a) Zeige: Jedes Ideal I ist folgendermaßen zu schreiben

$$\delta(a\mathbb{Z} + \frac{b+\sqrt{D}}{2}\mathbb{Z}) \text{ mit } a, b, \delta \in \mathbb{Z}, a > 0.$$

Umgekehrt stellt eine solche Menge ein Ideal I dar, für dessen Norm $\mathfrak{N}(I) = a\delta^2$ gilt und dessen Schnitt mit $\mathbb{Z}$ durch $I \cap \mathbb{Z} = \delta a\mathbb{Z}$ beschrieben wird.
b) Es sei $c := \frac{b^2-D}{4a}$. Zeige, daß

$$(c, \frac{-b+\sqrt{D}}{2})^{-1}.I$$

ein Hauptideal ist.

2 . Aufgabe (6 Punkte):
a) Folgere aus obiger Aufgabe, daß jede Idealklasse ein Ideal

$$J = a\mathbb{Z} + \frac{b+\sqrt{D}}{2}\mathbb{Z} \text{ mit}$$

$|\mathrm{b}| \leq a \leq c := \frac{b^2-D}{4a}$

enthält und daß man $b \geq 0$ annehmen kann, für den Fall, daß eines der obigen„$\leq$“ ein „=“ ist.
b) Zeige, daß $\mathfrak{N}(J) = a \leq \sqrt{|D|/3}$ gilt und vergleiche diesen Wert mit der oberen Schranke für die Norm aus Theorem 6.6.11 aus dem Buch von Schmidt.

3 . Aufgabe (6 Punkte) (Fortsetzung)**:**
a) Zeige für $x, y \in \mathbb{Q}$ die folgende Gleichung:

$$N(ax + \frac{b+\sqrt{D}}{2}y) = a(ax^2 + bxy + cy^2)$$

und folgere daraus: $a^2 = \min_{x \in J\setminus\{0\}} N(x)$.
b) Ein Ideal $J = a\mathbb{Z} + \frac{b+\sqrt{D}}{2}\mathbb{Z}$, daß obigen Punkt erfüllt (d.h. daß $a^2 = \min_{x \in J\setminus\{0\}} N(x)$, heißt „reduziert". Zeige, daß es in jeder Idealklasse genau ein reduziertes Ideal gibt, indem man zunächst zeigt, daß $ac = \min_{x \in J\setminus\{0\}} N(x)$ gilt.
c) Folgere aus obigem den

0.0.1 Satz: *Ist K ein quadratischer Zahlkörper der Diskriminante $D < 0$, dann sind die Idealklassen aus $\mathcal{O}_K$ in Bijektion mit den Tripeln (a, b, c), so daß $b^2 - 4ac = D, |b| \leq a \leq c$ und $b \geq 0$, wenn $|b| = a$ oder $a = c$.*

4 . Aufgabe (6 Punkte):
Berechne die Anzahl der Idealklassen von

$$\mathbb{Q}(\sqrt{-d}) \text{ für } d = 7, 11, 15, 19, 20 \text{ und } 20.$$