Übungen zur Elementaren Zahlentheorie

-5. Lösungsblatt-

Prof. Dr. K. Wingberg SS 2007
J. Bartels

http://www.mathi.uni-heidelberg.de/˜bartels/Uebungen.htm

Lösung zum sechsten Zettel

1 . Aufgabe :
a) Finde alle rechtwinkligen Dreiecke mit ganzzahligen Seitenlängen, deren Fläche ein Quadrat (d.h. in $\mathbb{Z}^2$) sind.
b) Finde alle ganzen Zahlen mit

$$x^4 - y^4 = z^2$$

Lösung
a) Es seien x, y, z positive ganze Zahlen, die der Gleichung

$$x^2 + y^2 = z^2$$

genügen und für die gilt

$$\frac{xy}{2} \in \mathbb{Z}^2.$$

Nach eventuellem Teilen sind diese Zahlen einander teilerfremd. Gemäß einem Satz der Vorlesung hat man nun $x = u^2 - v^2,\ y = 2uv,\ z = u^2 + v^2$ für gewisse $u, v > 0$ aus $\mathbb{Z}$. Zudem sind u, v teilerfremd und genau eine dieser Zahlen ist gerade. Man rechnet

$$\frac{xy}{2} = uv(u - v)(u + v) \qquad (*).$$

Weil $u \pm v$ ungerade ist, haben wir $(u + v, u - v) = 1$, also sind die vier Faktoren in $(*)$ paarweise teilerfremd, nach Annahme also Quadrate in $\mathbb{Z}$. Daraus ergibt sich die Existenz von a, b, c, d mit c, d ungerade so, daß

$$u = a^2,\ v = b^2,\ u + v = c^2,\ u - v = d^2.$$

b ist aufgrund der Gleichung $2b^2 = c^2 - d^2 \equiv 0 (mod\ 4)$ eine gerade Zahl: $b = 2b'$, was dann die Gleichung

$$\left(\frac{c+d}{2}\right)\left(\frac{c-d}{2}\right) = 2b'^2$$

ergibt. Der ggT zu den Zahlen $c \pm d$ ist 2 und wir haben daher in $\frac{c+d}{2}$ oder in $\frac{c-d}{2}$ eine gerade Zahl vorliegen. Nehmen wir o.B.d.A. an, $\frac{c+d}{2}$ sei gerade. Dann haben wir das folgende Produkt ganzer Zahlen

$$\frac{c+d}{4}\frac{c-d}{2} = b'^2$$

Aufgrund der Teilerfremdheit der Faktoren haben wir $r, s \in \mathbb{Z}$ so, daß

$$c + d = 4s^2,\ c - d = 2r^2.$$

Also ist $a^2 = r^4 + 4s^4$ und damit ist das Tripel $(r^2, 2s^2, a)$ eine Lösung mit $a < z$. Das kann man jetzt unendlich oft machen. Das ist absurd.
b) Ist $x^4 - y^4 = z^2$ eine Lösung und $X := x^4 - y^4,\ Y := 2x^2y^2,\ Z := x^4 + y^4$, dann sind X, Y, Z die Kantenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks mit quadratischem Flächeninhalt, was es nach a) nicht gibt.