# Übungen zur Elementaren Zahlentheorie

-4. Lösungsblatt-

Prof. Dr. K. Wingberg
J. Bartels

SS 2007

http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~bartels/Uebungen.htm

Lösung zum fünften Zettel

**1 . Aufgabe :**
a) Finde alle ganze Zahlen $x, y$, so daß

$$y^2 = x^3 + 16 \text{ gilt.}$$

b) Finde alle Zahlen mit

$$y^2 = x^3 - 3x + 2.$$

a) Wir haben die folgende Umformung:

$$x^3 = (y-4)(y+4)$$

Für ungerades $y$ sind $y \pm 4$ zwei teilerfremde Zahlen, was bedeutet, daß im obigen Produkt zwei Kubikzahlen mit dem Abstand 8 auftauchen. Solche gibt es nicht, also hat die Gleichung für ungerades $y$ niemals eine Lösung.
Ist $y = 2y'$, dann kann man gleiches mit $x$ machen: $x = 2x'$. Daraus ergibt sich die Gleichung

$$(y'+2)(y'-2) = 2x'^3.$$

Modulo 4 bedeutet das: $(y'+2)^2 \equiv 0, 2(mod\ 4)$, weshalb man $(y'+2)^2 \equiv 0(mod\ 4)$ folgern kann. Es ist also $y' = 2s$ auch gerade, ebenso $x' = 2t$. Aus unserer Gleichung wird dann

$$(s+1)(s-1) = 4t^3.$$

Man erkennt, daß $s$ ungerade sein muß, da $s \pm 1$ nach obiger Gleichung gerade ist: $s = 2u+1$.

$$u(u+1) = t^3$$

ist das Ergebnis. Man hat also zwei aufeinander folgende Kubikzahlen $u, u+1$, also ist $u = -1$ oder 0. Das setzt man jetzt in alles obige ein und ist anschließend um die Lösung $(x, y) = (0, \pm 4)$ reicher.
b) Wir wenden die Methode des Zettels „Diophantische Gleichungen“ an. Aus der Lösung $(1, 0)$ bauen wir eine Gerade durch diesen Punkt. Sie genügt der Gleichung $t(x-1) = y$. In der kubischen Gleichung erhält man aus

$$y^2 = (x-1)^2(x+2)$$

die Lösung

$$x = t^2 - 2 \text{ (daraus folgt: } t \in \mathbb{Z}).$$

und somit für $y$ den Wert

$$\pm t(t^2 - 3),$$

welcher für $t \in \mathbb{Z}$ auch eine ganze Zahl ist. Dies sind die Lösungen der Gleichung.