Übungen zur Elementaren Zahlentheorie
-3. Lösungsblatt-

Prof. Dr. K. Wingberg SS 2007
J. Bartels

http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~bartels/Uebungen.htm

Lösung zum vierten Zettel

1 . Aufgabe :
a) Finde alle Lösungen in den nicht-negativen ganzen Zahlen der Gleichung

$$a^2 + 5b^2 - 2c^2 - 2cd - 3d^2 = 0$$

b) Hat die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 + v^2 = xyzuv - 65$$

eine Lösung in $\mathbb{Z}$, bei der jede dieser Zahlen größer als 7000 ist?
Hinweis: Man nehme sich eine Lösung und konstruiere eine, die aus größeren Zahlen besteht.

Zur a):
Formen wir um:

$$a^2 + 5b^2 = 2c^2 + 2cd + 3d^2 = 2(c + \frac{d}{2})^2 + \frac{5}{2}d^2.$$

Das multiplizieren wir mit vier:

$$4a^2 + 20b^2 = 2(2c + d)^2 + 10d^2$$

und rechnen modulo 5 weiter:

$$4a^2 \equiv 2(2c + d)^2 (mod\ 5).$$

Dabei wird die rechte Seite allein dann ein Quadrat sein, wenn $2c+d \equiv 0(mod\ 5)$ gilt, also wird a durch 5 geteilt.
Andererseits hat man

$$4a^2 - 2(2c + d)^2 = 10d^2 - 20b^2.$$

Die linke Seite ist durch 25 teilbar, demso die rechte Seite und es gilt $d^2 \equiv 2b^2(mod\ 5)$. Also teilt 5 auch die Zahlen b, c, d und $(a/5, b/5, c/5, d/5)$ wäre eine weitere Lösung. Dies könnte man ad infinitum so weiterführen, ohne die ganzen Zahlen zu verlassen, was absurd ist.
Zu b):
Man findet folgende „kleine“ Lösung:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55 = 120 - 65 = 1.2.3.4.5 - 65.$$

Sind bei einer Lösung (x, y, z, u, v) mindestens 4 dieser Zahlen größer gleich 2, dann baut man sich eine weitere Lösung in folgender Weise:
Es sei o.B.d.A. x die kleinste der obigen Zahlen, so hat man die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 + v^2 = xyzuv - 65,$$

welche getrost als Gleichung zweiten Grads in x verstanden werden darf. Deren andere Lösung ist folglich gegeben durch den Ausdruck $yzuv - x$, hernach findet man die weitere Lösung $(yzuv - x, y, z, u, v)$ und es gilt $yzuv \geq 8y > x$. Dieses läßt sich wiederum beliebig oft durchführen. Jedesmal wird ein x (meinetwegen auch ein y, z, u oder v durch eine bedeutend größere Zahl ersetzt. Also gibt es eine Lösung, bei der alle Zahlen größer als 7000 sind. Eine solche ist gegeben durch

$$x = 7138,\ y = 16988437,\ z = 72151760667066$$

$$u = 10411753134715721848679433319$$

$$v = 910963053262711431585151116301823505184255396081040 5.$$