

Übungen zur Elementaren Zahlentheorie

-letztes Blatt-

Prof. Dr. K. Wingberg
J. Bartels

SS 2007
Zentralübung 4. Juli

<http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~bartels>

1 . Aufgabe :

Zeige:

Es sei p eine Primzahl. Dann ist \sqrt{p} keine rationale Zahl.

2 . Aufgabe :

Zeige:

Ist d ein größter gemeinsamer Teiler von $a, b \in \mathbb{Z}[i]$, dann gibt es $x, y \in \mathbb{Z}[i]$ mit

$$xa + yb = d$$

3 . Aufgabe :

Was ist $\varphi(15)$?

Zeige:

Für alle ganzen Zahlen a gilt

$$a^9 \equiv a \pmod{15}.$$

4 . Aufgabe :

Was für abelsche Gruppen gibt es der Ordnung 8?

5 . Aufgabe :

Zeige:

Hat man eine zyklische Gruppe der Ordnung 10,
so gibt es genau eine Untergruppe der Ordnung 5.

6 . Aufgabe :

Ist $(\mathbb{Z}/16\mathbb{Z})^*$ zyklisch?

Ist $(\mathbb{Z}/50\mathbb{Z})^*$ zyklisch?

Ist $(\mathbb{Z}/27\mathbb{Z})^*$ zyklisch?

7 . Aufgabe :

Berechne:

$$\left(\frac{257}{347}\right)$$

$$\left(\frac{620}{691}\right)$$

$$\left(\frac{169}{2089}\right)$$

8 . Aufgabe :

Was ist die Klassenzahl von $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$?

9 . Aufgabe :

Zeige:

Für eine Primzahl p ist das Polynom

$$X^{p-1} + X^{p-2} + \dots + X + 1$$

irreduzibel.

10 . Aufgabe :

Man löse die Gleichung

$$x^3 \equiv 1 \pmod{13}.$$

11 . Aufgabe :

Für welche ganzen Zahlen x gilt

$$x \equiv 3 \pmod{10}$$

und

$$x \equiv 6 \pmod{13}?$$

12 . Aufgabe :

Was ist der ggT von $8 + 9\sqrt{-2}$ und $5 + 3\sqrt{-2}$ in $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$?

13 . Aufgabe :

Welche Primzahlen $p \in \mathbb{N}$ sind prim in $\mathbb{Z}[i]$?

14 . Aufgabe :

Für welche Primzahlen p hat

$$x^2 \equiv 5 \pmod{p}$$

eine Lösung?

15 . Aufgabe :

Für welche ganze Zahlen a hat

$$x^2 \equiv a \pmod{29}$$

eine Lösung?

16 . Aufgabe :

Zeige:

Es gibt unendlich viele Primzahlen $\equiv 2 \pmod{3}$.

17 . Aufgabe :

Was ist das Minimalpolynom von $\sqrt{7} - \sqrt{-7}$? Was ist dessen Spur und dessen Norm?

18 . Aufgabe :

Zeige:

Sind p, q zwei verschiedene ungerade Primzahlen, dann ist $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{q})$.

19 . Aufgabe :

Was ist der Ganzheitsring von $\mathbb{Q}(\sqrt{\pm 5})$?

20 . Aufgabe :

Wie ist die Idealklassengruppe definiert?

21 . Aufgabe :

Bestimme den größten gemeinsamen Teiler von $X^4 + X^3 + X^2 - X + 1$ und $X^3 - X^2 + 1$ in $\mathbb{Z}[X]$.

22 . Aufgabe :

Berechne das achte Kreisteilungspolynom.

23 . Aufgabe :

Gegeben sei ein kommutativer Ring R mit 1. Wann kann man einen ggT zweier Elemente daraus bestimmen?

24 . Aufgabe :

Zeige, daß man für eine Primzahl p die Kongruenz

$$(a + b)^p = a^p + b^p \pmod{p}$$

hat.

25 . Aufgabe :

Wieviele Nullen hat $780!$ am Ende?

26 . Aufgabe :

Wieviele invertierbare Elemente hat $\mathbb{Z}/521\mathbb{Z}$?

27 . Aufgabe :

Zeige: Für eine ungerade Zahl n gilt: $n^2 \equiv 1 \pmod{8}$.

28 . Aufgabe :

Was ist

$$\sum_{k=1}^n k \text{ in } \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}?$$

29 . Aufgabe :

$(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ sind Zahlen, die modulo 11 den Rest 7 bzw. 2 haben. Was ist der Rest von $a^2 - b^2$?

30 . Aufgabe :

Bestimme alle Zahlen a , so daß 6 den Ausdruck $a^{10} + 1$ teilt.

31 . Aufgabe :

$2^{70} + 3^{70}$ ist eine durch 13 teilbare Zahl.

32 . Aufgabe :

Sind $2^{456} + 7$ und 15 teilerfremd?