

# Übungen zur Elementaren Zahlentheorie

-1. Blatt-

Prof. Dr. K. Wingberg  
J. Bartels

SS 2007  
abzugeben bis Montag, den 23. April 2007

---

## 1 . Aufgabe (6 Punkte):

Man zeige, daß die Gleichungen

$$a) \quad 7x^3 + 2 = y^3$$

und

$$b) \quad x^2 + y^2 = 3z^2$$

keine ganzzahligen Lösungen besitzen.

## 2 . Aufgabe (6 Punkte):

a) Für jede natürliche Zahl  $n \geq 1$ , ist  $4^{2n+1} + 3^{n+2}$  durch 13 teilbar.

b) Für jede natürliche Zahl  $n \geq 1$ , ist  $3^{3n+3} - 26n - 27$  durch 169 teilbar.

## 3 . Aufgabe (6 Punkte):

a) Für eine reelle Zahl  $x$  bezeichne  $[x]$  die größte ganze Zahl kleiner gleich  $x$ .

Sei  $p$  eine Primzahl und  $n$  eine natürliche Zahl und  $p^k, k \geq 0$  sei die höchste  $p$ -Potenz, die in  $n!$  aufgeht. Dann ist

$$k = \left[ \frac{n}{p} \right] + \left[ \frac{n}{p^2} \right] + \left[ \frac{n}{p^3} \right] + \dots$$

b) Mit wievielen Nullen hört die Zahl  $2007!$  in der Dezimaldarstellung auf?

c) Man bestimme die letzten zwei Ziffern von  $2^{1000}$  und  $3^{1000}$  (wieder in der Dezimaldarstellung).

## 4 . Aufgabe (6 Punkte):

a) Es gilt für ganze Zahlen  $m, n$ :

$$n^4 + 4m^4 = (n^2 + 2nm + 2m^2)(n^2 - 2nm + 2m^2).$$

b) Für welche natürlichen Zahlen  $m, n$  ist  $n^4 + 4m^4$  prim?

c) Zeige, daß

$$4^{545} + 545^4$$

nicht prim ist.