# Übungen zur Elementaren Zahlentheorie

-11. Blatt-

Prof. Dr. K. Wingberg
J. Bartels

SS 2007
abzugeben bis Montag, den 9. Juli 2007 um elf Uhr

http://www.mathi.uni-heidelberg.de/˜bartels/Uebungen.htm

Name:
Übungsleiter:

| *Aufgabe* | 1 | 2 | 3 | 4 | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|
| *Punkte* | | | | | |

**1 . Aufgabe (6 Punkte):**
a) Folgere aus obiger Aufgabe, daß jede Idealklasse ein Ideal

$$J = a\mathbb{Z} + \frac{b+\sqrt{D}}{2}\mathbb{Z} \text{ mit } |b| \leq a \leq c := \frac{b^2 - D}{4a}$$

enthält und daß man $b \geq 0$ annehmen kann, für den Fall, daß eines der obigen„$\leq$“ ein „=“ ist.
b) Zeige, daß $\mathfrak{N}(J) = a \leq \sqrt{|D|/3}$ gilt und vergleiche diesen Wert mit der oberen Schranke für die Norm aus Theorem 6.6.11 aus dem Buch von Schmidt.

**2 . Aufgabe (6 Punkte)** (Fortsetzung)**:**
a) Zeige für $x, y \in \mathbb{Q}$ die folgende Gleichung:

$$N(ax + \frac{b+\sqrt{D}}{2}y) = a(ax^2 + bxy + cy^2)$$

und folgere daraus: $a^2 = \min_{x \in J\setminus\{0\}} N(x)$.
b) Ein Ideal $J = a\mathbb{Z} + \frac{b+\sqrt{D}}{2}\mathbb{Z}$, daß obigen Punkt erfüllt (d.h. daß $a^2 = \min_{x\in J\setminus\{0\}} N(x)$), heißt „reduziert“. Zeige, daß es in jeder Idealklasse genau ein reduziertes Ideal gibt, indem man zunächst zeigt, daß $ac = \min_{x\in J\setminus\{0\}} N(x)$ gilt.
c) Folgere aus obigem den

**0.0.1 Satz:** *Ist $K$ ein quadratischer Zahlkörper der Diskriminante $D < 0$, dann sind die Idealklassen aus $\mathcal{O}_K$ in Bijektion mit den Tripeln $(a, b, c)$, so daß $b^2 - 4ac = D, |b| \leq a \leq c$ und $b \geq 0$, wenn $|b| = a$ oder $a = c$.*

**3 . Aufgabe (6 Punkte):**
Berechne die Anzahl der Idealklassen von

$$\mathbb{Q}(\sqrt{-d}) \text{ für } d = 7, 15 \text{ und } 19.$$

**4 . Aufgabe (6 Punkte):**
Was ist die Idealklassengruppe von

$$\mathbb{Q}(\sqrt{d}) \text{ für } d = -21, -23 \text{ und } -31.$$