Übungen zur Elementaren Zahlentheorie

-8. Blatt-

Prof. Dr. K. Wingberg
J. Bartels

SS 2007
abzugeben bis Montag, den 18. Juni 2007 um elf Uhr

http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~bartels/Uebungen.htm

Übungsleiter:

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
Punkte					

---

1 . Aufgabe (6 Punkte):
Die folgenden Polynome sind irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$:
a) $X^3 + X + 1$.
b) $X^5 - X + 1$.
c) $X^5 - X^4 - 14X^3 - 23X^2 - 31X - 17$.

2 . Aufgabe (6 Punkte):
Es sei x eine Nullstelle des Polynoms $X^5 - X + 1$ und $\mathbb{Q}(x)$ sei per definitionem der kleinste Körper, der $\mathbb{Q}$ und x enthält.
a) Welche Dimension hat er als Vektorraum über $\mathbb{Q}$?
Wieviele Elemente haben $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}(x), \mathbb{R})$und $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}(x), \mathbb{C})$?
b) Obiges x liefert eine lineare (daß diese linear ist, ist bekannt aus der LA) Abbildung

$$x : \mathbb{Q}(x) \to \mathbb{Q}(x), y \mapsto xy.$$

Was ist deren Determinante?

3 . Aufgabe (6 Punkte):
Wir nehmen $x := \sqrt[3]{2} \in \mathbb{R}$ und $K := \mathbb{Q}(x)$.
a) Für $z = a + bx + cx^2 \in K$ haben wir

$$z : K \to K; y \mapsto zy.$$

Berechne die Spur von z (die Spur einer Matrix ist die Summe ihrer Diagonaleinträge).
b) Berechne das Hauptpolynom von z. Berechne die Determinante von z.

4 . Aufgabe (6 Punkte):
a)Finde alle $n > 0$, so daß die Gleichung $(a^a)^n = b^b$ mindestens eine ganzzahlige Lösung $a, b > 1$ hat.
b) Finde alle ganzen Zahlen $a, b > 0$ mit $(a^a)^5 = b^b$.