Übungen zur Linearen Algebra
-7. Blatt-

Prof. Dr. K. Wingberg
J. Bartels

WS 2007/2008
abzugeben bis Dienstag, den 10. Dezember 2007 um 9:30 Uhr

http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~bartels/LA

Name: /name/

Matrikelnummer: /nr/

Übungsleiter: /uebleiter/

Man achte auf eine saubere Darstellung und eine ordentliche Schrift. Bitte keine maschinell erstellten Lösungen abgeben.

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
Punkte					

---

1 . Aufgabe (6 Punkte):
Es sei E der $\mathbb{C}$-Vektorraum

$$E = \{P(X,Y) | P(X,Y) = \sum_{i,j \leq 2} a_{i,j} X^i Y^j, \text{ wobei } a_{i,j} \in \mathbb{C} \text{ für } 0 \leq i,j \leq 2\}$$

der komplexwertigen Polynome in zwei Variablen vom Grad ≤ 2.

a) Was ist die Dimension von E?

b) Zeigen Sie, daß die Abbildung $u : E \to E, P \mapsto \frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial P}{\partial Y}$ im Endomorphismenring $End(E)$ liegt und bestimmen Sie die Dimension des Kerns und des Bildes.

Hierbei ist mit $\frac{\partial}{\partial X}$ (resp. $\frac{\partial}{\partial Y}$) die Ableitung nach X (resp. Y) gemeint:

$$\frac{\partial}{\partial X}(\sum_{i,j=0}^{n} a_{i,j} X^i Y^j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n} i a_{i,j} X^{i-1} Y^j.$$

2 . Aufgabe (6 Punkte):
Es sei M eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M. Zeigen Sie, daß die verschiedenen Äquivalenzklassen disjunkt sind und daß M in die disjunkte Vereinigung der Äquivalenzklassen bzgl. $\sim$ zerfällt.

3 . Aufgabe (6 Punkte):
Es seien die endlich-dimensionalen $K-$Vektorräume A, B, C, D und die linearen Abbildungen α, β und γ folgendermaßen

$$A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \xrightarrow{\gamma} D$$

gegeben. Zeigen Sie:

$$Rang(\beta \circ \alpha) + Rang(\gamma \circ \beta) \leq Rang(\beta) + Rang(\gamma \circ \beta \circ \alpha).$$

Hinweis: Benutzen Sie den Dimensionssatz.

4 . Aufgabe (6 Punkte):
Die lineare Abbildung $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei bezüglich der kanonischen Basis $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ durch die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -13 & 7 & -16 \\ -28 & 15 & -35 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ gegeben.}$$

a) Zeigen Sie, daß die Menge $T := \{t_1 := b_1 + 2b_2, t_2 := 2b_1 + 5b_2, t_3 := 3b_1 + 7b_2 + b_3\}$ eine weitere Basis des $\mathbb{R}^3$ darstellt und geben Sie die Übergangsmatrix C_T^B von B zu T an.

b) Berechnen Sie die Koordinatenmatrix A' von ρ bezüglich der Basis T.