Übungen zur Linearen Algebra

-6. Blatt-

Prof. Dr. K. Wingberg — WS 2007/2008
J. Bartels — abzugeben bis Dienstag, den 4. Dezember 2007 um 9:30 Uhr

http://www.mathi.uni-heidelberg.de/˜bartels/UebungenLA0708.htm

Name: /name/

Matrikelnummer: /nr/

Übungsleiter: /uebleiter/

Man achte auf eine saubere Darstellung und eine ordentliche Schrift. Bitte keine maschinell erstellten Lösungen abgeben.

$Aufgabe$	1	2	3	4	$\sum$
$Punkte$					

---

1 . Aufgabe (6 Punkte):
V sei ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K und $f : V \to V$ ein Endomorphismus mit $f \circ f = f$. Zeigen Sie, daß es Unterräume $U, W \leq V$ gibt, so daß

- $$V = U \oplus W$$
- $f(U) \subseteq U$ und $f(W) \subseteq W$
- $f|_U : U \to U$ ist die Identität auf U.
- $f|_W : W \to W$ ist die Nullabbildung.

2 . Aufgabe (6 Punkte):
Es seien E, F zwei $K-$Vektorräume endlicher Dimension und $f \in Hom(E, F), g \in Hom(F, E)$ gegeben und es gelte:

$$g \circ f \circ g = g \text{ sowie } f \circ g \circ f = f$$

a) Man zeige:
$$E = Bild(g) \oplus Kern(f)$$

b) Man vergleiche den Rang von f und g.

3 . Aufgabe (6 Punkte):
Es seien ein $K-$Vektorraum E der Dimension n und zwei Endomorphismen $f, g \in End(E)$ gegeben.
Zeigen Sie:

$$Rang(f \circ g) \geq Rang(f) + Rang(g) - n.$$

4 . Aufgabe (6 Punkte):
Es seien ein $K-$Vektorraum E der Dimension n und ein Endomorphismus $f \in End(E)$ gegeben.

a) Es sei für $i \in \mathbb{N}$ die Abbildung f^i durch $i-$maliges Hintereinanderausführen von f definiert:

$$f^i := f \circ \cdots \circ f$$

Man setze

$$Bild_i := f^i(E) \text{ und } Kern_i := Kern(f^i),$$

und zeige für jedes $i \in \mathbb{N}$:

$$Bild_i \geq Bild_{i+1} \text{ und } Kern_i \leq Kern_{i+1},$$

wobei „ $\leq$“ in der obigen Zeile bedeute, daß es sich um Teilräume handelt. Desweiteren gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, daß für $i \geq m$ stets

$$Bild_i = Bild_m \text{ und } Kern_i = Kern_m$$

gilt. Für solche i ist E die direkte Summe

$$E = Bild_i \oplus Kern_i.$$