Übungen zur Linearen Algebra

-4. Blatt-

Prof. Dr. K. Wingberg
J. Bartels

WS 2007/2008
abzugeben bis Dienstag, den 20. November 2007 um 9:30 Uhr

http://www.mathi.uni-heidelberg.de/˜bartels/LA

Name:

Matrikelnummer:

Übungsleiter:

Man achte auf eine saubere Darstellung und eine ordentliche Schrift. Bitte keine maschinell erstellten Lösungen abgeben.

$Aufgabe$	1	2	3	4	$\sum$
$Punkte$					

---

1 . Aufgabe (6 Punkte):
Es seien U, W Untervektorräume eines Vektorraums V. Man zeige, daß die Vereinigung $U \cup W$ genau dann ein Unterraum von V ist, wenn entweder $U \subset W$ oder $W \subset U$ gilt.

2 . Aufgabe (6 Punkte):

a) Für $n \geq 2$ sei der Zykel

$$\sigma = (1, 2, ..., n) \in S_n$$

Bestimmen Sie alle Permutationen $\tau \in S_n$, welche mit σ kommutieren, d.h. für die gilt

$$\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma.$$

b) Es sei $s \in S_{10}$ die Permutation $u \circ v$, wobei

$$u = (1, 2, 3, 4, 5) \text{ und } v = (6, 7, 8, 9, 10)$$

Bestimmen Sie die Permutationen $\tau \in S_n$, welche mit s kommutieren, d.h. $\tau \circ s = s \circ \tau$. (Hinweis: Zeigen Sie zunächst, daß diese Elemente zusammengenommen eine Gruppe in der S_{10} ergeben und benutzen Sie Teil a).

3 . Aufgabe (6 Punkte):
Es sei K ein Körper und $M \neq \emptyset$ eine Menge und $x \in M$ ein darin enthaltenes Element gegeben. Zeigen Sie:

a) Die Mengen
$$U = \{f \in K^M | f(x) = 0\}$$
und
$$V = \{f \in K^M | f(a) = f(b) \text{ für alle } a, b \in M\}$$
sind zwei Untervektorräume von K^M.

b) $U \cap V = \{0\}$.

c) $U + V = K^M$.

4 . Aufgabe (6 Punkte):

a) Es sei K ein Körper und
$$K[X] := \{\sum_{0 \leq i \leq n} a_i X^i | n \in \mathbb{N}, a_i \in K\}$$
die Menge der Polynome mit Koeffizienten in K. Zeigen Sie, daß diese einen $K-$Vektorraum bilden.

b) Ist für ein $n \in \mathbb{N}$ ein Element
$$P(X) = \sum_{0 \leq i \leq n} a_i X^i \in K[X] \text{ mit } a_n \neq 0 \text{ gegeben,}$$
dann ist
$$deg(P(X)) := n$$
der „Grad“ des Polynoms $P(X)$.
Es sei $(P(X)_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Polynomen mit $deg(P(X)_n) = n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie (induktiv):
Der Teilraum $K[X]_n := \{f \in K[X] : deg(f) \leq n\}$ wird von $\{P(X)_1, ..., P(X)_n\}$ erzeugt.

c) Folgern Sie: $(P(X)_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Basis des Vektorraums $K[X]$, d.h. Jedes Element $f(X) \in K[X]$ ist endliche Linearkombination von Elementen $P(X)_n$.