Übungen zur Linearen Algebra

-3. Blatt-

Prof. Dr. K. Wingberg
J. Bartels

WS 2007/2008
abzugeben bis Dienstag, den 13. November 2007 um 9:30 Uhr

http://www.mathi.uni-heidelberg.de/˜bartels/LA

Name:

Matrikelnummer:

Übungsleiter:

Man achte auf eine saubere Darstellung und eine ordentliche Schrift. Bitte keine maschinell erstellten Lösungen abgeben.

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
Punkte					

---

1 . Aufgabe (6 Punkte):

a)

Die Teilmengen $T_i,\ 1 \leq i \leq 5$ von $\mathbb{R}^4$ seien folgendermaßen definiert:

$$T_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)|x_1 \neq 0\}$$
$$T_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)|x_2 + x_3 = 0 \wedge \text{ (und) } x_2 + x_4 = 0\}$$
$$T_3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)|x_1 - x_3 = 0 \vee \text{ (oder) } x_2 - x_4 = 0\}$$
$$T_4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)|x_1 \in \mathbb{Q}\}.$$

Welche T_i sind Unterräume des $\mathbb{R}^4$?

b)

Die Teilmengen $S_i,\ 1 \leq i \leq 4$ von $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f|f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ Abbildung}\}$ seien definiert durch

$$S_1 = \{f|f(1) = 0\}$$
$$S_2 = \{f|f(1) = 1\}$$
$$S_3 = \{f|f(x) = f(-x) \text{ für jedes } x \in \mathbb{R}\}$$
$$S_4 = \{f|f(x) = -f(-x) \text{ für jedes } x \in \mathbb{R}\}.$$

Welche dieser Mengen sind Unterräume von $Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

2 . Aufgabe (6 Punkte):
Es seien folgende Vektoren aus $\mathbb{R}^4$ gegeben:

$$\{v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

Läßt sich jeder Vektor $v \in \mathbb{R}^4$ folgendermaßen darstellen:

$$v = \lambda_1.v_1 + \lambda_2.v_2 + \lambda_3.v_3 + \lambda_4.v_4 + \lambda_5.v_5 \text{ mit geeignet gewählten } \lambda_i \in \mathbb{R}\ ?$$

3 . Aufgabe (6 Punkte):
Es bestehe C aus allen Vektoren $x = (x_1, ..., x_7) \in \mathbb{F}_2^7$ mit

$$\begin{aligned} x_5 &= x_2 + x_3 + x_4 \\ x_6 &= x_1 + x_3 + x_4 \\ x_7 &= x_1 + x_2 + x_4 \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, daß C ein Unterraum von $\mathbb{F}_2^7$ mit 16 Elementen ist.
b) Zeigen Sie, daß sich je zwei verschiedene Elemente aus C an mindestens drei Stellen unterscheiden.

4 . Aufgabe (6 Punkte):
Es sei A ein Ring indem für jedes Element $x \in A$ die Gleichung $x^2 = x$ gilt. Zeigen Sie, daß dieser Ring kommutativ ist. (Hinweis: Versuchen Sie zunächst, die Charakteristik dieses Ringes herauszubekommen.)