Übungen zur Linearen Algebra
-2. Blatt-

Prof. Dr. K. Wingberg
J. Bartels

WS 2007/2008
abzugeben bis Dienstag, den 6. November 2007 um 9:30 Uhr

http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~bartels/LA.htm

Name:

Matrikelnummer:

Übungsleiter:

Man achte auf eine saubere Darstellung und eine ordentliche Schrift. Bitte keine maschinell erstellten Lösungen abgeben.

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
Punkte					

---

1 . Aufgabe (6 Punkte):
Gibt es einen Körper mit 4 Elementen? Welche Charakteristik müßte ein solcher Körper haben? Falls es einen solchen gibt, beschreiben Sie ihn durch Angabe der Additions- und der Multiplikationstafel.

2 . Aufgabe (6 Punkte):
In der Vorlesung wurde die symmetrische Gruppe S_n eingeführt. In dieser Gruppe gibt es spezielle Elemente, die „Zykel" der Ordnung k. Ein Zykel σ wird folgendermaßen dargestellt:

$$\sigma = (a_1, a_2, a_3, ..., a_k), \text{ wobei } a_i \in \{1, ..., n\} \text{ für } i = 1, ..., k.$$

Hierbei sind die a_i alle voneinander verschieden und die Schreibweise bedeutet, daß $\sigma(a) = a$ gilt, wenn kein $a_i = a$ für irgendein i ist, d.h. a taucht in der obigen Klammer nirgends auf. Ansonsten gilt bei dieser Notation $\sigma(a_i) = a_{i+1}, (i < k)$ und $\sigma(a_k) = a_1$.
a) Zeigen Sie: Für jedes $\tau \in S_n$ gilt:

$$\tau(a_1, a_2, ..., a_k)\tau^{-1} = (\tau(a_1), \tau(a_2), ..., \tau(a_k)).$$

b) Zeigen Sie: Jedes Element $\tau \in S_n$ läßt sich als Produkt (d.h. Hintereinanderausführung) von Zykeln der Form $(1, i)$, mit $1 < i \leq n$ schreiben.
c) Zeigen Sie: Jedes Element $\tau \in S_n$ läßt sich als Produkt (d.h. Hintereinanderausführung) von Zykeln der Form $(1, 2)$ und $(1, 2, ..., n)$ schreiben.

3 . Aufgabe (6 Punkte):
Es seien M, N endliche Mengen mit gleich vielen Elementen und es sei ferner eine Abbildung $f : M \to N$ gegeben.
a) Zeigen Sie: f ist genau dann injektiv, wenn f surjektiv ist.
b) Gilt dasselbe für unendliche Mengen M, N?

4 . Aufgabe (6 Punkte):
In dieser Aufgabe wird der Körper $\mathbb{F}_{17}$ behandelt. Zu $z \in \mathbb{Z}$ sei $\overline{z}$ die zugehörige Restklasse modulo 17.
a) Was ist das Inverse der $\overline{2}$? Gesucht ist also $x \in \mathbb{Z}$ mit $\overline{x}\overline{2} = \overline{1}$. Wie kann man x (außer durch ausprobieren) systematisch finden?
b) Kann man in $\mathbb{F}_{17}$ eine Wurzel aus $\overline{-1}$ ziehen, d.h. gibt es ein $x \in \mathbb{Z}$ mit $\overline{x}^2 = \overline{-1}$?
c) Wie oft muß man $\overline{3}$ mit sich selbst multiplizieren, bis man $\overline{1}$ erhält?
d) Aus Teilaufgabe c) folgere man: Für jedes $z \in \mathbb{F}_{17}$ gilt $\overline{z}^{17} = \overline{z}$.