Übungen zur Linearen Algebra

- 10. Blatt -

Prof. Dr. K. Wingberg — WS 2007/2008
J. Bartels — abzugeben bis Dienstag, den 15. Januar 2008 um 9:30 Uhr

http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~bartels/LA

Name: /name/

Matrikelnummer: /nr/

Übungsleiter: /uebleiter/

2. Name: /namezwei/

2. Matrikelnummer: /nrzwei/

Man achte auf eine saubere Darstellung und eine ordentliche Schrift. Bitte keine maschinell erstellten Lösungen abgeben.

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
Punkte					

---

1 . Aufgabe (6 Punkte):
Zeigen Sie, daß für komplexe Zahlen $x, a_i \neq 0$ für $i = 1, ..., n$ gilt:

$$\begin{vmatrix} a_1 + x & x & \cdots & x \\ x & a_2 + x & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & \cdots & a_n + x \end{vmatrix} = a_1 a_2 ... a_n x (\frac{1}{x} + \frac{1}{a_1} + ... + \frac{1}{a_n}).$$

2 . Aufgabe (6 Punkte):
Zeigen Sie:

$$\begin{vmatrix} 1 + x_1 & 1 + x_1^2 & \cdots & 1 + x_1^n \\ 1 + x_2 & 1 + x_2^2 & \cdots & 1 + x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 + x_n & 1 + x_n^2 & \cdots & 1 + x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i<j} (x_j - x_i)(2x_1 ... x_n - (x_1 - 1)(x_2 - 1)...(x_n - 1)).$$

3 . Aufgabe (6 Punkte):
Zeigen Sie:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^n \\ 1 & 2x & 3x^2 & \cdots & (n+1)x^n \\ 1 & 2^2x & 3^2x^2 & \cdots & (n+1)^2x^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2^{n-1}x & \cdots & \cdots & (n+1)^{n-1}x^n \\ 1 & y & y^2 & \cdots & y^n \end{vmatrix} = (\prod_{k=1}^{n-1} k!)x^{n(n-1)/2}(y-x)^n.$$

4 . Aufgabe (6 Punkte):
Es seien $a_i, b_i \in \mathbb{C}$, wobei $i = 1, ..., n$ und $a_i \neq -b_j$ für alle $i, j \in \{1, ..., n\}$. Dann gilt:

$$det((\frac{1}{a_i + b_j})_{1 \leq i,j \leq n}) = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n}(a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i,j \leq n}(a_i + b_j)}$$

Hinweis: Versuchen Sie es mit vollständiger Induktion!