Übungen zur Linearen Algebra
-1. Blatt-

Prof. Dr. K. Wingberg
J. Bartels

WS 2007/2008
abzugeben bis Dienstag, den 30. Oktober 2007 um neun (!) Uhr

Name:

Matrikelnummer:

Übungsleiter:

Man achte auf eine saubere Darstellung und eine ordentliche Schrift. Bitte keine maschinell erstellten Lösungen abgeben.

$Aufgabe$	1	2	3	4	$\sum$
$Punkte$					

1 . Aufgabe (6 Punkte):
Es seien zwei Mengen E, F gegeben mit den Teilmengen $A, B \subset E$ und $C, D \subset F$. Ferner sei

$$f : E \to F; x \mapsto f(x)$$

eine Abbildung zwischen diesen Mengen. Zeigen Sie die Gleichungen:

$$\begin{array}{rcl}
(I) & f(A \cap f^{-1}(C)) & = f(A) \cap C \\
(II) & f(A \cap B) & \subset f(A) \cap f(B) \\
(III) & f^{-1}(F \setminus C) & = E \setminus f^{-1}(C) \\
(IV) & f(f^{-1}(D)) & \subset D.
\end{array}$$

2 . Aufgabe (6 Punkte):
Zu einer Menge E ist die Potenzmenge $\mathfrak{P}(E)$ gegeben durch

$$\mathfrak{P}(E) := \{M | M \text{ ist eine Teilmenge von } E\}.$$

Es seien Teilmengen $A, B \subset E$ und die Abbildung

$$f : \mathfrak{P}(E) \to \mathfrak{P}(E), M \in \mathfrak{P}(E) \mapsto f(M) := (A \cap M) \cup (B \cap (E \setminus M))$$

gegeben. Wann gibt es eine Teilmenge M mit $f(M) = \emptyset$?

3 . Aufgabe (6 Punkte):
Es sei M eine Menge mit $n \in \mathbb{N}$ vielen Elementen. Zeigen Sie:
(I) $\mathfrak{P}(M)$ hat 2^n Elemente.
(II) Es gibt genau $n!$ Bijektionen $f : M \to M$.

4 . Aufgabe (6 Punkte):
Zeigen Sie: Die Mengen der Matrices

$$\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) | ad - bc \neq 0\}$$

und

$$\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}) | ad - bc = 1\}$$

sind eine Gruppe.