Klassenkörpertheorie

Matthias Kümmerer

27. Mai 2010

1 Lokale und globale Körper

Definition 1. *Ein* lokaler Körper *k ist eine algebraische Erweiterung von den p-adischen Zahlen $\mathbb{Q}_p$ oder den formalen Laurentreihen $\mathbb{F}_p((x))$ über $\mathbb{F}_p$. Ist die Erweiterung endlich, so nennt man k einen* lokalen Körper von endlichem Typ.

Definition 2. *Ein* globaler Körper *k ist eine algebraische Erweiterung von $\mathbb{Q}$ oder den rationalen Funktionen $\mathbb{F}_p(x)$ über $\mathbb{F}_p$. Ist die Erweiterung endlich, so nennt man k einen* globalen Körper von endlichem Typ.

Bemerkung 3. Lokale Körper sind die Vervollständigung von globalen Körpern bezüglich deren Primdivisoren. $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ sollen im folgenden im Zweifelsfall als lokale Körper angesehen werden.

Definition 4. *Die* Divisorengruppe *$D(L)$ eines globalen Körpers L von endlichem Typ ist definiert durch formale Linearkombinationen der Primdivisoren als*

$$D(L) = \bigoplus_{\mathfrak{p}\nmid\infty} \mathbb{Z}\mathfrak{p}$$

Sei $v_\mathfrak{q}$ die Exponentialbewertung zu einem Primdivisor $\mathfrak{q}$ auf L mit Wertegruppe $\mathbb{Z}$. Man erhält einen Homomorphismus

$$\begin{array}{rcl} ():L^\times & \to & D(L) \\ \alpha & \mapsto & \displaystyle\sum_{\mathfrak{q}\nmid\infty} v_\mathfrak{q}(\alpha)\mathfrak{q} \end{array}$$

Die Elemente von $D(L)$ werden oft multiplikativ geschrieben.

Der Kokern von $()$ wird Klassengruppe *$Cl(L)$ von L genannt. Für $L' \subset L$ ein weiterer globaler Körper gibt es einen eindeutigen Monomorphismus $D(L') \to D(L)$, der mit der Einbettung $L' \to L$ verträglich ist. Da*

$$\begin{tikzcd} L'^{\times} \arrow[r] \arrow[d] & D(L') \arrow[r] \arrow[d] & Cl(L') \arrow[d] \\ L^{\times} \arrow[r] & D(L) \arrow[r] & Cl(L) \end{tikzcd}$$

kommutiert, lassen sich $D(K)$ und $Cl(K)$ für allgemeine globale Körper als induktiver Limes über die Unterkörper von endlichem Typ definieren.

Nun soll jedem lokalen oder globalen Körper k ein sogenannter Formationsmodul $A(k)$ zugeordnet werden, dass später Informationen über die abelschen Erweiterungen von k liefern wird. Für einen lokalen Körper wird dies einfach $A(k) = k^{\times}$ sein, für globale Körper muss eine geeignete Form gefunden werden, die es erlaubt, durch ein Lokal-Global-Prinzip die Probleme in den einzelnen lokalen Vervollständigungen zu behandeln.

Definition 5. *Für einen globalen Körper k definiert man die Gruppe J_k der Idele als die Untergruppe von $\prod_{\mathfrak{p}} k_{\mathfrak{p}}^{\times}$, deren Elemente fast überall Einheiten sind:*

$$J_k = \{(\alpha_{\mathfrak{p}}) \in \prod_{\mathfrak{p}} k_{\mathfrak{p}}^{\times} | \text{fast alle } \alpha_{\mathfrak{p}} \text{ Einheiten in } k_{\mathfrak{p}}^{\times}\}$$

Für endliches $\mathfrak{p}$ definiert man als $U_{\mathfrak{p}}$ die Einheitengruppe und für unendliches $\mathfrak{p}$ setzt man $U_{\mathfrak{p}} = k_{\mathfrak{p}}^{\times}$. Dann gilt $\prod_{\mathfrak{p}} U_{\mathfrak{p}} \subset J_k$ und man versieht J_k mit der Finaltopologie der Inklusion. Nach dem Satz von Tychonov ist $\prod_{\mathfrak{p}} U_{\mathfrak{p}}$ und damit J_k lokalkompakt.

Man kann einem Idel einen Divisor zuordnen durch die Zuordnung

$$\begin{array}{rcl} J_k & \to & D(k) \\ (\alpha_{\mathfrak{p}}) & \mapsto & \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(\alpha_{\mathfrak{p}})} \end{array}$$

Sei nun k globaler Körper von endlichen Typ, $\varphi : k \hookrightarrow K$. Dies induziert eine Abbildung $\varphi' : \mathfrak{P} \mapsto \varphi'(\mathfrak{P})$ durch

$$\begin{tikzcd} k \arrow[r, hook, "\varphi"] \arrow[dr, dashed, "v_{\mathfrak{P}}"'] & K \arrow[d, "v_{\varphi'(\mathfrak{P})}"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

und eine Abbildung $\varphi_* : k_{\varphi'(\mathfrak{P})} \to K_{\mathfrak{P}}$, da durch obiges Diagramm $\varphi'(\mathfrak{P})$-Cauchyfolgen in k auf $\mathfrak{P}$-Cauchyfolgen in K abgebildet werden. Weiter induziert dies nun einen Morphismus

$$\begin{array}{rcl} J_k & \hookrightarrow & J_K \\ (\alpha_{\mathfrak{p}}) & \mapsto & (\varphi_*(\alpha_{\varphi'(\mathfrak{P})})) \end{array}$$

Ist K/k normal, so operiert also $\mathrm{Gal}(K/k)$ auf J_K ($\sigma \in \mathrm{Gal}(K/k)$, $\sigma : KK$ induziert wie eben angegeben einen Morphismus $J_K \hookrightarrow J_K$) und es ist $J_K^{\mathrm{Gal}(K/k)} = J_k$. Ferner definiert man eine Einbettung

$$\begin{array}{rcl} k^\times & \hookrightarrow & J_k \\ \alpha & \mapsto & (\alpha). \end{array}$$

Die Elemente im Bild bezeichnet man als *Hauptidele*. Nun lässt sich der Formationsmodul $A(k)$ definieren:

Definition 6. *Für einen lokalen Körper definiert man $A(k) = k^\times$. Für einen globalen Körper definiert man $A(k) = C_k = J_k/k^\times$ die* Idelklassengruppe *von k.*

Ein Morphismus $k \hookrightarrow K$ induziert einen Morphismus $C_k \hookrightarrow C_K$. Ist K/k normal, so operiert $\mathrm{Gal}(K/k)$ auf C_K, da die Operation auf J_K Hauptidele auf Hauptidele abbildet und es gilt $C_K^G = C_k$, denn aus der kurzen exakten Sequenz

$$1 \to K^\times \to J_K \to C_K \to 1$$

folgt die lange exakte Kohomologiesequenz

$$1 \to k^\times \to J_k \to C_K^G \to H^1(G, K^\times) = 0,$$

also $C_K^G = J_k/k^\times = C_k$.

Definition 7. *Sei K/k endlich und separabel. Dann ist für $\alpha \in A(K)$ die Norm definiert als*

$$N_{K/k}\alpha = \prod_{g \in \mathrm{Gal}(K/k)} g\alpha.$$

Sei k global von endlichem Typ, $\mathfrak{p}$ Primstelle in k. Dann definiert man eine Inklusion

$$\begin{array}{rcl} k_\mathfrak{p}^\times & \longrightarrow & J_k \\ \alpha & \longmapsto & (\alpha_\mathfrak{q}) \end{array}$$

mit $\alpha_\mathfrak{p} = \alpha$ und $\alpha_\mathfrak{q} = 1$ für $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$. Dies induziert $k_\mathfrak{p}^\times \hookrightarrow C_k$.

2 Die multiplikative Gruppe eines lokalen Körpers

Sei k lokal von endlichem Typ, $\mathfrak{p}$ maximales Ideal und $q = char(\mathfrak{K}_\mathfrak{p})$. Dann bilden die U^n, $n = 1, \ldots$ eine Umgebungsbasis der 1, wobei $U^n = U_\mathfrak{p}^n = \{\alpha \in k^\times, \alpha \equiv 1(\mathfrak{p}^n)\}$ die Haupteinheiten vom Grad n sind. U^1 heißt auch die Gruppe der Einseinheiten. Die U^n sind offen, geschlossen, kompakt und es gilt $U^n/U^{n+1} \cong \mathfrak{K}_\mathfrak{p}$, wodurch $U^n = \varinjlim_\nu U^n/U^{n+\nu}$ eine proendliche Gruppe wird und ein $\mathbb{Z}_q$-Modul.

Sei $\mathfrak{p} = (\pi)$. Dann ist die zyklische Gruppe $< \pi >$ in $k^\times$ geschlossen und somit eine diskrete Untergruppe. Da[1] für ein $\alpha \in k^\times$ gilt: $\alpha = \pi^{v_\mathfrak{p}(\alpha)}\zeta\varepsilon$ mit $\zeta \in \mu_{q-1}$ und $\varepsilon \in U^1$, folgt

$$k^\times = < \pi > \times \mu_{q-1} \times U^1$$

[1] siehe AZT1

3 Klassenkörpertheorie

Definition 8. *Sei G eine pro-endliche Gruppe, A ein stetiger G-Modul. Dann nennt man (G, A)* Formation*.*

Bemerkung 9. Seien $\{G_K \subset G\}$ die offenen (d.h. abgeschlossen von endlichen Index) Untergruppen von G. Man nennt die Indizes K Körper, den Index K_0 mit $G_{K_0} = G$ Grundkörper. Man schreibt $K \subset L$ wenn $G_L \subset G_K$, $[L : K] = (G_K : G_L)$, $G_{L/K} = G_K/G_L$ und $A_K = A^{G_K}$. Man nennt L/K abelsch, endlich, ..., wenn $G_{L/K}$ dies ist.

Nun betrachtet man die Gruppenkohomologie der A_k, und schreibt $H^q(L/K) = H^q(G_{L/K}, A_L)$. Für eine Erweiterungskette $N/L/K$ erhält man die Abbildungen

$$\begin{array}{rcl} H^q(L/K) & \xrightarrow{inf} & H^q(N/K) \\ H^q(N/K) & \xrightarrow{res} & H^q(N/L) \\ H^q(N/L) & \xrightarrow{cores} & H^q(N/K) \end{array}$$

Definition 10. *Eine Formation (G, A) heißt Klassenformation, wenn*

1. *$H^1(L/K) = 1$ für L/K normal*

2. *Für normale L/K existiert ein Isomorphismus, die* Invariantenabbildung

$$\mathrm{inv}_{L/K} : H^2(L/K) \longrightarrow \frac{1}{[L:K]}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$$

mit

   a) Für $N/L/K$ normal ist $\mathrm{inv}_{L/K} = \mathrm{inv}_{N/K}|_{H^2(L/K)}$

   b) Für $N/K/K$ mit N/K normal kommutiert

$$\begin{tikzcd} H^2(N/K) \arrow[r, "\mathrm{inv}_{N/K}"] \arrow[d, "\mathrm{res}_L"] & \frac{1}{[N:K]}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \arrow[d, "\cdot[L:K]"] \\ H^2(N/L) \arrow[r, "\mathrm{inv}_{N/L}"] & \frac{1}{[N:L]}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

Definition 11. *Das durch $\mathrm{inv}_{L/K}(u_{L/K}) = \frac{1}{[L:K]} + \mathbb{Z}$ eindeutig bestimmte Element $u_{L/K} \in H^2(L/K)$ heißt* Fundamentalklasse *der normalen Erweiterung L/K*

Aus dem Satz von Tate folgt der

Hauptsatz 12. *Für alle L/K, $q \in \mathbb{Z}$ ist die durch das Cup-Produkt entstehende Abbildung*

$$u_{L/K} \cup - : H^q(G_{L/K}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^{q+2}(L/K)$$

ein Isomorphismus. Insbesondere gilt der

Hauptsatz 13. *Für $q = -2$ erhält man wegen $H^{-2}(G_{L/K}, \mathbb{Z}) \cong G^{ab}_{L/K}$ und $H^0(L/K) = A_K/N_{L/K}A_L$ das allgemeine Reziprozitätsgesetz*

$$\theta_{L/K} : G^{ab}_{L/K} \xrightarrow{\sim} A_K/N_{L/K}A_L$$

Satz 14. *Durch Umkehrung erhält man das* Artin- *oder* Normrestsymbol*:*

$$1 \longrightarrow N_{L/K}A_L \longrightarrow A_K \overset{(,L/K)}{\longrightarrow} G^{ab}_{L/K} \longrightarrow 1.$$

Es induziert eine Bijektion zwischen den abgeschlossenen Untergruppen U von endlichem Index in A_K und den endlichen abelschen Erweiterungen K/K, wobei $A_K/U \simeq G_{L/K}$. Es hat folgende Eigenschaften: Seien $N/L/K$ Erweiterungen, N/K normal. Dann ist

1.

$$\begin{tikzcd} A_K \arrow[r, "{(,N/K)}"] \arrow[d, "id"] & G^{ab}_{N/K} \arrow[d, "\pi"] \\ A_K \arrow[r, "{(,L/K)}"] & G^{ab}_{L/K} \end{tikzcd}$$

2.

$$\begin{tikzcd} A_K \arrow[r, "{(,N/K)}"] \arrow[d, "\text{inkl}"] & G^{ab}_{N/K} \arrow[d, "\text{ver}"] \\ A_L \arrow[r, "{(,N/L)}"] & G^{ab}_{N/L} \end{tikzcd}$$

3.

$$\begin{tikzcd} A_L \arrow[r, "{(,N/L)}"] \arrow[d, "N_{L/K}"] & G^{ab}_{N/L} \arrow[d, "\text{inkl}"] \\ A_K \arrow[r, "{(,N/K)}"] & G^{ab}_{N/K} \end{tikzcd}$$

4.

$$\begin{tikzcd} A_K \arrow[r, "{(,N/K)}"] \arrow[d, "\sigma"] & G^{ab}_{N/K} \arrow[d, "\sigma^*"] \\ A_{\sigma K} \arrow[r, "{(,\sigma N/\sigma L)}"] & G^{ab}_{\sigma N/\sigma L} \end{tikzcd}$$

Bemerkung 15. Für k einen lokalen Körper, K/k unverzweigt und $\alpha \in k^\times = A_k$ ist $(\alpha, K/k) = \sigma(K/k)^{v(\alpha)}$, wobei $\sigma(K/k)$ der Frobenius der Erweiterung und v die Bewertung von k ist. Für verzweigte Erweiterungen ist die Formel deutlich komplizierter zu berechnen. Für einen globalen Körper ist das Artinsymbol definiert durch das Produkt der lokalen Artinsymbole.

4 Der Hauptidealsatz

Der gruppentheoretische Hauptidealsatz besagt

Satz 16. *Sei G eine endliche Gruppe. Dann ist die Verlagerung $G \longrightarrow [G,G]$ trivial.*

Dieser Satz soll im folgenden auf Körpererweiterungen angewendet werden. Dazu müssen zuerst einige Vorbereitungen getroffen werden:

Definition 17. *Sei k'/k eine endliche Erweiterung, $\mathfrak{p}$ Primstelle in k. Man sagt $\mathfrak{p}$* zerfällt voll in k', *wenn $\#\{\mathfrak{P} \text{ in } k' | \mathfrak{P}|_k = \mathfrak{p}\} = (k' : k)$.*

Satz 18. [2] *Sei L/K abelsch, $I = N_{L/K}C_L \subset C_K$ die Normgruppe und $\mathfrak{p}$ eine Primstelle von K. Dann ist $\mathfrak{p}$ unverzweigt in L genau dann, wenn $U_\mathfrak{p} \subset I$, wobei $U_\mathfrak{p} \subset K_\mathfrak{p}$ die Einheitengruppe ist. Ist $\mathfrak{p}$ unverzweigt und ferner $(\pi) \subset K_\mathfrak{p}$ das maximale Ideal in $K_\mathfrak{p}$, dann zerfällt $\mathfrak{p}$ in L voll genau dann, wenn $\pi \in I$.*

Sei nun im Folgenden k ein Zahlkörper von endlichem Grad und K/k die maximale abelsche Erweiterung, die überall unverzweigt ist. Desweitern sei E die Gruppe aller Idele von k, deren Koeffizienten bei den endlichen Primstellen Einheiten sind, also

$$E = \prod_{\mathfrak{p}\nmid\infty} U_\mathfrak{p} \times \prod_{\mathfrak{p}|\infty} k_\mathfrak{p} = \prod_{\mathfrak{p}} U_\mathfrak{p} \subset J_k$$

Nun kann man einen Homomorphismus $J_k \longrightarrow D(k)$ definieren durch

$$\varphi : (\alpha_\mathfrak{p}) \longmapsto \prod_{p\nmid\infty} \mathfrak{p}^{v_\mathfrak{p}(\alpha_\mathfrak{p})},$$

der offenbar den Kern E hat. Dies induziert eine Abbildung $C_k \longrightarrow Cl(k)$ mit Kern $Ek^\times/k^\times$.

Für K/k gilt nun folgender

Satz 19. *Die Erweiterung K/k ist endlich und entspricht der Untergruppe $Ek^\times/k^\times \subset C_k$. Desweitern ist $\mathrm{Gal}(K/k) \simeq Cl(k)$ und ein Primdivisor $\mathfrak{p}$ in k zerfällt in K genau dann vollständig, wenn $\mathfrak{p}$ ein Hauptdivisor ist.*

[2] Siehe Neukirch: Klassenkörpertheorie, Mannheim 1969, III, 8.1 und 8.3

Beweis. Durch obigen Homomorphismus folgt $Cl(k) \simeq C_k/(Ek^\times/k^\times)$. Da $Cl(k)$ endlich ist, hat $Ek^\times/k^\times$ jedenfalls endlichen Index in C_k. Außerdem ist für alle $\mathfrak{p}$ in k die Einheitengruppe $U_\mathfrak{p} \subset Ek^\times/k^\times$. Also ist nach Satz 18 die zu $Ek^\times/k^\times$ gehörende Erweiterung von k unverzweigt. Sei K' eine weitere endliche abelsche unverzweigte Erweiterung von k. Dann gilt wieder für alle $\mathfrak{p}$, dass $U_\mathfrak{p} \subset N_{K'/k}C_{K'}$ und daher nach der Definition von E, dass $Ek^\times/k^\times \subset N_{K'/k}C_{K'}$, also ist die zu $Ek^\times/k^\times$ gehörende Erweiterung in der Tat die maximal abelsche unverzweigte Erweiterung K/k. Wegen Satz 14 ist damit auch $\mathrm{Gal}(K/k) \simeq C_k/(Ek^\times/k^\times) \simeq Cl(k)$.

Sei $\mathfrak{p}$ eine Primdivisor und π ein Primelement in $k_\mathfrak{p}$. Nach Satz 18 zerfällt $\mathfrak{p}$ genau dann, wenn $\pi \in N_{K/k}C_K = Ek^\times/k^\times = \ker\varphi$, was gerade bedeutet, dass $\mathfrak{p}$ ein Hauptdivisor ist.

Sei nun $K(p)$ die maximale unverzweigte abelsche p-Erweiterung von k und $Cl(k)[p'] \subset Cl(k)$ die Untergruppe der Elemente, deren Ordnung zu p teilerfremd ist. Dann gilt der

Satz 20. $\mathrm{Gal}(K(p)/k) \simeq Cl(k)/Cl(k)[p']$. *Eine Primstelle $\mathfrak{p}$ in k zerfällt in $K(p)$ genau dann vollständig, wenn es eine ganze Zahl a teilerfremd zu p gibt, so dass $\mathfrak{p}^a$ Hauptdivisor ist*

Satz 21. *Sei $\mathfrak{a} \subset k$ ein Divisor. Dann gibt es eine ganze Zahl a teilerfremd zu p, so dass $\mathfrak{a}^a$ in $K(p)$ ein Hauptdivisor ist.*

Beweis. Sei K' die maximal unverzweigte abelsche p-Erweiterung von $K(p)$. Dann ist $\mathrm{Gal}(K(p)/k)$ der maximale abelsche Quotient von $\mathrm{Gal}(K'/k)$, also ist $\mathrm{Gal}(K'/K(p))$ der Kommutator von $\mathrm{Gal}(K'/k)$. Nach dem gruppentheoretischen Hauptidealsatz ist die Verlagerung $\mathrm{ver}: \mathrm{Gal}(K'/k) \longrightarrow \mathrm{Gal}(K'/K(p))$ also trivial. Nach Satz 14, 2 ist

$$\begin{tikzcd}
C_k = A_k \arrow[r, "{(\,,K'/k)}"] \arrow[d, "\mathrm{inkl}"] & G_{K'/k} \arrow[d, "\mathrm{ver}"] \\
C_{K(p)} = A_{K(p)} \arrow[r, "{(\,,K'/K(p))}"] & G_{K'/K(p)}
\end{tikzcd}$$

kommutativ und daher $C_k \subset \ker(\,,K'/K(p))$ in $C_{K(p)}$. Da nun mit Satz 20: $A_{K(p)}/\ker(\,,K'/K(p)) \simeq \mathrm{Gal}(K'/K(p)) \simeq Cl(K(p)/Cl(K(p))[p']$, wird also jeder Primdivisor $\mathfrak{p}$ in $K(p)$ bis auf p-teilerfremde Potenz ein Hauptdivisor.

Nun sei k ein globaler Körper von endlichem Typ und von Charakteristik p und S eine endliche nichtleere Menge von Primstellen von k. Mit K^S bezeichne man die maximale abelsche unverzweigte Erweiterung, in der alle Primstellen aus S komplett zerfallen, $K^S(p)$ bezeichne die maximale p-Zwischenerweiterung von K^S/k.

Satz 22. *K^S ist eine endliche Erweiterung, die der Untergruppe*

$$Ek^\times \prod_{\mathfrak{p}\in S} k_\mathfrak{p}^\times/k^\times \subset C_k$$

entspricht. Desweiteren ist $\mathrm{Gal}(K^S/k)$ *isomorph zum Quotienten* $Cl_S(k)$ *von* $Cl(k)$ *modulo der von den Primstellen in* S *erzeugten Untergruppe. Eine Primstelle* $\mathfrak{p}$ *in* k *zerfällt in* K^S *genau dann vollständig, wenn es einen Divisor* $\mathfrak{a} \in < S >$ *gibt, so dass* $\mathfrak{p}\mathfrak{a}$ *ein Hauptdivisor ist.*

Es folgen die Analoga zu den Sätzen 20 und 21:

Satz 23. $\mathrm{Gal}(K^S(p)/k)$ *ist isomorph zu* $\mathrm{Cl}_S(k)(p')$*. Eine Primstelle* $\mathfrak{p}$ *in* k *zerfällt in* $K(p)$ *genau dann vollständig, wenn es eine ganze Zahl* a *teilerfremd zu* p *und einen Divisor* $\mathfrak{a} \in < S >$ *gibt, so dass* $\mathfrak{p}^a\mathfrak{a}$ *ein Hauptdivisor ist.*

Satz 24. *Sei* $\mathfrak{a} \subset k$ *ein Divisor. Dann gibt es eine ganze Zahl* a *teilerfremd zu* p *und ein Divisor* $\mathfrak{b} \in < S >$*, so dass* $\mathfrak{a}^a\mathfrak{b}$ *in* $K^S(p)$ *ein Hauptdivisor ist.*

5 Die Kohomologie des Formationsmoduls

Die oben eingeführte Invariantenabbildung lässt sich fortsetzen zu $\mathrm{inv}_{K/k} : H^2(K/k) \longrightarrow \frac{1}{[K:k]}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Dann hat sie folgende Eigenschaften:

1. Sei k'/k endliche Zwischenerweiterung von K/k, dann kommutiert

$$\begin{tikzcd} H^2(K/k') \arrow[rr, hook, "\mathrm{cores}"] \arrow[dr, "\mathrm{inv}_{K/k'}"'] & & H^2(K/k) \arrow[dl, "\mathrm{inv}_{K/k}"] \\ & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} & \end{tikzcd}$$

2. Sei K'/k normale Zwischenerweiterung von K/k, dann kommutiert

$$\begin{tikzcd} H^2(K'/k) \arrow[rr, hook, "\mathrm{inf}"] \arrow[dr, "\mathrm{inv}_{K'/k}"'] & & H^2(K/k) \arrow[dl, "\mathrm{inv}_{K/k}"] \\ & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} & \end{tikzcd}$$

3. Sei $\sigma : K \xrightarrow{\sim} \sigma K$, σ^* die auf H^2 induzierte Abbildung, dann kommutiert

$$\begin{tikzcd} H^2(K/k) \arrow[rr, "\sigma^*"] \arrow[dr, "\mathrm{inv}_{K/k}"'] & & H^2(\sigma K/\sigma k) \arrow[dl, "\mathrm{inv}_{\sigma K/\sigma k}"] \\ & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} & \end{tikzcd}$$