3.Vortrag - Relationen und Gruppenalgebren

Franziska Mellinghoff, Lina Martel

29.04.2010

1 Relationensysteme

Es gelte im Folgenden:
G sei eine pro-p-Gruppe, F eine freie pro-p-Gruppe mit dem Erzeugendensystem $\{t_i \mid i \in I\}$ und $1 \to R \to F \xrightarrow{\varphi} G \to 1$ eine Darstellung von G mit Hilfe von F.
Es sei $\{G_i \mid i \in I\}$ eine Familie von pro-p-Gruppen, $\{\varphi_i \mid i \in I\}$ eine Familie von Morphismen φ_i von G_i in G. Für jedes i sei T_i ein Normalteiler von G_i, wobei G_i/T_i eine freie pro-p-Gruppe ist.
Es sei $\{\varphi_i \mid i \in I\}$ zulässig bezüglich $\{T_i \mid i \in I\}$, d.h. in jedem offenen Normalteiler von G liegen fast alle $\varphi_i(T_i)$.
Weiter sei für jedes $i \in I$ eine Darstellung $1 \to R_i \to F_i \xrightarrow{\psi_i} G_i \to 1$ gegeben.
χ_i sei ein Morphismus von F_i nach F und $\overline{\chi}_{\mathrm{i}}$ seine Einschränkung auf R_i, so dass folgendes Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccccc} R_i & \longrightarrow & F_i & \xrightarrow{\psi_i} & G_i \\ \downarrow{\scriptstyle \overline{\chi}_{\mathrm{i}}} & & \downarrow{\scriptstyle \chi_i} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_i} \\ R & \longrightarrow & F & \xrightarrow{\varphi} & G \end{array}$$

Es sei außerdem $\{\overline{\chi}_{\mathrm{i}} \mid i \in I\}$ bezüglich $\{R_i \mid i \in I\}$ zulässig.

Außerdem definieren wir $H^1(G) := H^1(G, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.

Wir betrachten nun die induzierte Abbildung $\varphi_{\mathrm{i}}^* : H^\nu(G) \to H^\nu(G_i)$.

Bemerkung 1.1: *Es gilt für $\alpha \in H^\nu(G)$, $\nu \geq 2$: $\varphi_i^*\alpha = 0$ für fast alle i.*

Beweis: Sei f ein Repräsentant aus α. f hängt nur von den Restklassen von G bezüglich eines offenen Normalteilers U von G ab. Da φ_i als zulässig bezüglich T_i gewählt war, gilt für fast alle $i \in I$ $\varphi_i T_i \subset U$. f induziert nun also einen Kozykel aus $K^\nu(G_i)$, der nur von den Restklassen von G_i bezüglich T_i abhängt und wird somit von einem Kozykel aus $K^\nu(G_i/T_i)$ induziert. Da G_i/T_i nach Voraussetzung frei ist, verschwindet $H^\nu(G_i/T_i)$ und daher auch $\varphi_i^*\alpha$.

Bemerkung 1.2: *Die Abbildung $\chi^* : H^1(R) \to \bigoplus_{i \in I} H^1(R_i)$ ist wohldefiniert.*

Beweis: Es ist also zu zeigen: Für fast alle $i \in I$ ist das Bild eines $f \in H^1(R)$ bei der von χ_i induzierten Abbildung $\chi_i^* : H^1(R) \to H^1(R_i)$ gleich 0.
Es sei U ein Normalteiler von R, auf dem f konstant ist (zu finden, indem man das Urbild der Null unter φ betrachtet und mit R schneidet). Dann erhält man für fast alle $i \in I$ eine natürliche Faktorisierung

$$R_i \to U \to R$$

und dementsprechend eine Sequenz von Kohomologiegruppen

$$H^1(R) \to H^1(U) \to H^1(R_i).$$

Daraus folgt die Behauptung, weil das Bild von f in $H^1(U)$ verschwindet, da f auf U konstant gewählt war.
Die Abbildung $\chi^* : H^1(R) \to \bigoplus_{i \in I} H^1(R_i)$ ist also wohldefiniert.

Satz 1.3: *Die Gruppen $\overline{\chi}_i(R_i)$, $i \in I$, erzeugen R als Normalteiler von F genau dann, wenn die Einschränkung von χ^* auf $H^1(R)^G$ injektiv ist.*

Um diesen Satz zu beweisen, benötigen wir zuerst:

Hilfssatz 1.4: *Es sei G eine beliebige Pro-p-Gruppe und A ein p-primärer G-Modul. Aus $A^G = \{0\}$ folgt $A = \{0\}$.*

Beweis: Jedes $a \in A$ erzeugt einen endlichen G-Modul A_0. Wäre $A_0 \neq \{0\}$, so wäre nach Satz 4.13[1] (Koch) auch $A_0^G \neq \{0\}$. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung.

Beweis von Satz 1.3:
"$\Rightarrow$"Es sei f ein Homomorphismus aus $H^1(R)^G$, dessen Bild bei χ^* verschwindet. Nach Voraussetzung wird R nun als Normalteiler von F von den Gruppen $\overline{\chi}_i(R_i)$ erzeugt. Es gilt also $f((\chi_i R_i)) = \{0\}$. Da f bei $h \in F$ invariant ist (denn man kann jedes $h \in F$ schreiben als $h = rg$, $r \in R$, $g \in G$), gilt auch $f(h\overline{\chi}_i(R_i)h^{-1}) = \{0\}$ und daher $f(R) = \{0\}$, d.h. $f = 0$.
"$\Leftarrow$"Umgekehrt sei nun die Einschränkung von χ^* auf $H^1(R)^G$ injektiv und sei R' der von $\chi_i(R_i)$, $i \in I$, erzeugte Normalteiler von F. Die Inklusion $R' \subset R$ induziert einen Homomorphismus $\tau : H^1(R) \to H^1(R')$, der die Abbildung χ^* faktorisiert:

$$H^1(R) \xrightarrow{\tau} H^1(R') \to \bigoplus_{i \in I} H^1(R_i).$$

Nach Voraussetzung liegen also im Kern von τ keine von 0 verschiedenen Elemente, die bei G invariant sind. Aus Hilfssatz 1.4 folgt nun also $\mathrm{Ker}\tau = \{0\}$, und wegen Satz 4.11[2] (Koch) gilt $R = R'$.

Definition 1.5: Eine Teilmenge $E \subseteq R$ heißt *Ergänzungsmenge* von $\{\chi_\mathrm{i} \mid i \in I\}$, wenn

[1]Satz 4.13 (Koch): Es sei $A \neq \{1\}$ eine endliche p-Gruppe, G eine Untergruppen der Automorphismengruppe von A von p-Potenzordnung. Dann ist $A^G \neq \{1\}$.

[2]Satz 4.11 (Koch): Es seien G_1, G_2 Pro-p-Gruppen und φ ein Morphismus von G_1 in G_2. Die Abbildung φ ist genau dann surjektiv, wenn die induzierte Abbildung φ^* von $H^1(G_2)$ in $H^1(G_1)$ injektiv ist.

(i) E zusammen mit $\bigcup_{i\in I}\chi_i(R_i)$ die Gruppe R als Normalteiler von F erzeugt,
(ii) in jeder Umgebung der Einheit von R fast alle Elemente von E enthalten sind.
Die Menge E heißt *minimal*, wenn keine Teilmenge von E Ergänzungsmenge ist.

Satz 1.6: *Es sei $\{\varphi_i \mid i \in I\}$ eine zulässige Familie von Morphismen φ_i von G_i in G bezüglich $\{T_i \mid i \in I\}$, und es sei eine zulässige Darstellung von $\{\varphi_i \mid i \in I\}$ gegeben, wobei die Darstellungen von G_i und G minimal seien*:

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & R_i & \longrightarrow & F_i & \longrightarrow & G_i & \longrightarrow & 1 \\
 & & \Big\downarrow \overline{\chi}_i & & \Big\downarrow \chi_i & & \Big\downarrow \varphi_i & & \\
1 & \longrightarrow & R & \longrightarrow & F & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

Weiter sei E eine minimale Ergänzungsmenge von $\{\chi_i \mid i \in I\}$ und φ^* die induzierte Abbildung

$$\varphi^* : H^2(G) \to \bigoplus_{i\in I} H^2(G_i).$$

Dann gilt

$$\dim\ker\varphi^* = \#E.$$

Beweis: Sei $R_j = F_j$ für $j \in E$ die von j erzeugte Untergruppe von F und χ_j die Inklusion $F_j \hookrightarrow F$. Dann ist $\{\chi_j \mid j \in I \cup E\}$ zulässig, und $\bigcup_{j\in I\cup E}\chi_j(R_j)$ erzeugt R als Normalteiler von F. Nach Satz 1.3 ist die induzierte Abbildung

$$H^1(R)^G \to \bigoplus_{j\in I\cup E} H^1(R_j)$$

also injektiv. Nun betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
H^1(R)^G & \longrightarrow & \bigoplus_{j\in I\cup E} H^1(R_j) \\
\Big\uparrow & & \Big\uparrow \\
ker\psi^* & \longrightarrow & \bigoplus_{j\in E} H^1(R_j)
\end{array}$$

wobei ψ^* die induzierte Abbildung

$$\psi^* : H^1(R)^G \to \bigoplus_{i\in I} H^1(R_i)_i^G$$

bezeichnet. Die zweite Zeile im obigen Diagramm ist injektiv und sogar ein Isomorphismus:
Wir betrachten das exakte und kommutative Diagramm

$$
\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \ker(\psi^*) \arrow[d] & \\
 & 0 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & H^1(R)^G \arrow[r, "id"] \arrow[d, "\beta"] & H^1(R)^G \arrow[r] \arrow[d, "\psi^*"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \bigoplus_{i\in E} H^1(R_i) \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_{i\in E} H^1(R_i) \oplus \bigoplus_{i\in I} H^1(R_i)^{G_i} \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\delta"] & \bigoplus_{i\in I} H^1(R_i)^{G_i} \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon"] & 0 \\
 & \bigoplus_{i\in E} H^1(R_i) \arrow[r] & Kokern(\beta) \arrow[r] & Kokern(\psi^*) &
\end{tikzcd}
$$

Nach AZT 1 (Übungsblatt 11/ Aufgabe 2; "Schlangenlemma") ist dann auch die Sequenz

$$0 \to \ker\psi^* \xrightarrow{h} \bigoplus_{i\in E} H^1(R_i) = Kokern(\alpha) \xrightarrow{f} Kokern(\beta) \xrightarrow{g} Kokern(\psi^*)$$

exakt. Somit ist h genau dann surjektiv, wenn g injektiv ist. Die Injektivität von g kann man mittels einer Diagrammjagd zeigen:
Sei $\bar{x} \in \ker(g)$, d.h. $g(\bar{x}) = 0 \in Kokern(\psi^*)$. Dann existiert ein $m \in Im(\psi^*)$ mit $\varepsilon(m) = 0$. Desweiteren existieren ein $y \in H^1(R)^G$ mit $\psi^*(y) = m$ und ein $x \in Ker(\delta)$ mit $\beta(y) = x$. Wegen der Kommutativität gilt nun $\gamma(x) = \psi^*(y) = m$ und $g(\delta(x)) = \varepsilon(\gamma(x)) = \varepsilon(m) = 0$, d.h. $\delta(x) \in Ker(g)$. OE gelte $\delta(x) = \bar{x}$. Da $x \in Ker(\delta)$ folgt somit $\bar{x} = \delta(x) = 0$.
Nach dem Satz von Hochschild-Serre[3] haben wir ein exaktes kommutatives Diagramm

$$
\begin{tikzcd}
 & & H^1(G) \arrow[r] \arrow[d, "Inf"] & \bigoplus_{i\in I} H^1(G_i) \arrow[d, "Inf"] \\
 & & H^1(F) \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_{i\in I} H^1(F_i) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & Ker\psi^* \arrow[r] \arrow[d, dotted] & H^1(R)^G \arrow[r, "\psi^*"] \arrow[d, "Tra"] & \bigoplus_{i\in I} H^1(R_i)^{G_i} \arrow[d, "Tra"] \\
0 \arrow[r] & Ker\varphi^* \arrow[r] & H^2(G) \arrow[r, "\varphi^*"] \arrow[d] & \bigoplus_{i\in I} H^2(G_i) \arrow[d] \\
 & & 0 & 0
\end{tikzcd}
$$

[3]siehe Fußnote 7

Da die Darstellungen von G_i und G minimal sind, sind die Inflationen und folglich auch die Transgressionen Isomorphismen. Daher ist auch die induzierte Abbildung $\ker\psi^* \to \ker\varphi^*$ ein Isomorphismus. Wegen

$$\dim\ker\psi^* = \dim\bigoplus_{j\in E} H^1(R_j) = \#E \,^4$$

folgt hieraus die Behauptung.

Wir heben noch zwei Spezialfälle von Satz 1.6 hervor. Dazu definieren wir den Begriff des Relationenranges.

Definition 1.7: Unter dem *Relationenrang r(G)* der Pro-p-Gruppe G versteht man die $\mathbb{F}_p$-Dimension von $H^2(G)$.

Satz 1.8: *Der Relationenrang einer Pro-p-Gruppe G ist gleich der Mächtigkeit eines beliebigen minimalen Relationensystems.*

Beweis: Nach den vorigen Sätzen, Satz 1.6 und 1.3, und Def. 1.7 gilt:

$$r(G) = \dim_{\mathbb{F}_p} H^2(G) = \dim_{\mathbb{F}_p} H^1(R)^G = \dim_{\mathbb{F}_p} \bigoplus_{i\in I} H^1(R_i) = \#I$$

wobei I ein minimales Relationensystem von G bezeichnet.

Satz 1.9: *Die Voraussetzungen seien die gleichen wie in Satz* 1.6.
R wird genau dann von den Untergruppen $\chi_i(R_i)$, $i \in I$, erzeugt, wenn φ^* injektiv ist.

Beweis: Sei E eine minimale Ergänzungsmenge. R wird genau dann von den Untergruppen $\chi_i(R_i)$, $i \in I$, erzeugt, wenn $\#\, E = 1$ ist. Nach Satz 1.6 gilt dies genau dann, wenn $\dim Ker(\varphi^*) = 1$ ist, d.h. genau dann, wenn φ^* injektiv ist.

2 Vollständige Gruppenalgebra

Es sei Λ im Folgenden ein kompakter, kommutativer Ring mit Einselement.

Es sei G eine proendliche Gruppe. Sind N, N' offene Normalteiler von G mit $N' \subset N$, so können wir die natürliche Abbildung $G/N' \to G/N$ linear zu einem Homomorphismus $\Lambda[G/N'] \to \Lambda[G/N]$ der Gruppenalgebren fortsetzen. Auf diese Weise erhält man ein projektives System von kompakten Ringen $\{\Lambda[G/N] \mid N \in \mathfrak{U}_G\}$.

Definition 2.1: Die *vollständige Gruppenalgebra* $\Lambda[[G]]$ der proendlichen Gruppe G über dem kompakten Ring Λ ist der projektive Limes des Systems $\{\Lambda[G/N] \mid N \in \mathfrak{U}_G\}$.

[4] Die letzte Gleichung gilt, da R_j $\forall j \in E$ frei und E minimal ist; also gilt $\forall j \in E$: $\dim H^1(R_j) = 1$.

Da die Algebren $\Lambda[G/N]$ kompakt sind, ist auch $\Lambda[[G]]$ kompakt. Durch die Abbildung

$$g \to \prod_{N \in \mathfrak{U}_G} gN$$

wird G in $\Lambda[[G]]$ eingelagert, $\Lambda[G]$ ist überall dicht in $\Lambda[[G]]$.

$\Lambda[[G]]$ hat folgende weitere Eigenschaften:

Satz 2.2:
(i) Die Zuordnung $G \to \Lambda[[G]]$ *ist ein kovarianter Funktor aus der Kategorie der proendlichen Gruppen in die Kategorie der kompakten* Λ*-Algebren.*
(ii) Es sei A *eine kompakte* Λ*-Algebra. Jeden Morphismus* φ *von* G *in die Einheitengruppe* A^* *von* A*, lässt sich eindeutig fortsetzen auf einen Morphismus von* $\Lambda[[G]]$ *in* A*.*
(iii) Es sei $\varphi : G \to G'$ *ein Morphismus endlicher Gruppen mit dem Kern* N*. Der Kern des induzierten Morphismus* $\varphi' : \Lambda[[G]] \to \Lambda[[G']]$ *ist das abgeschlossene Ideal* $I(N)$*, das von den Elementen* $h - 1$*,* $h \in N$*, erzeugt wird.*

Beweis: (ii) Zunächst lässt sich φ eindeutig zu einem stetigen Homomorphismus φ' von $\Lambda[G]$ in A fortsetzen, indem man λg auf $\lambda\varphi(g)$ abbildet. Da $\Lambda[G]$ dicht in $\Lambda[[G]]$ ist, lässt sich φ' eindeutig auf $\Lambda[[G]]$ fortsetzen.
(i) Die Existenz des zugeordneten Morphismus' ist ein Spezialfall von (ii). $G_1 \to G_2$ wird auf $\Lambda[[G_1]] \to \Lambda[[G_2]]$ fortgesetzt.
(iii) Sei φ O.B.d.A. surjektiv. Durch Einsetzen sieht man, dass gilt $I(N) \subset \mathrm{Ker}\varphi'$ ($\varphi'(h-1) = \varphi(h-1) = \varphi(h) - \varphi(1) = 1 - 1 = 0$). Daher induziert φ' einen Morphismus

$$\overline{\varphi} : \Lambda[[G]]/I(N) \to \Lambda[[G']].$$

Die Einschränkung $\psi : \{G + I(N)\}/I(N) \to G'$ von $\overline{\varphi}$ ist ein Isomorphismus. ψ^{-1} lässt sich daher nach (ii) zu einem Morphismus von $\Lambda[[G']]$ in $\Lambda[[G]]/I(N)$ fortsetzen, der die Umkehrung von $\overline{\varphi}$ ist. Daraus folgt $I(N) = \mathrm{Ker}\varphi'$.

Satz 2.3: *Es sei* G *eine proendliche Gruppe. Das System* $\{I(N) \mid N \in \mathfrak{U}_G\}$ *ist ein volles Umgebungssystem der* 0 *in* $\Lambda[[G]]$*.*

Beweis: Dies folgt unmittelbar aus Satz 1.13[5] (Koch) und Satz 2.2.

3 Diskrete und kompakte Moduln

Definition 3.1: Ein kompakter $\Lambda[[G]]$-Modul A heißt *frei*, wenn A für ein gewisses Indexsystem I isomorph zu dem direkten Produkt

$$\prod_I \Lambda[[G]],$$

betrachtet als $\Lambda[[G]]$-Modul, ist.

[5] Satz 1.13 (Koch): Es sei G, $\{\varphi_i \mid i \in I\}$ projektiver Limes des projektiven Systems $\{I, G_i, \varphi_i^j\}$ endlicher Gruppen G_i. Dann ist $\{\mathrm{Ker}\varphi_i \mid i \in I\}$ ein volles Umgebungssystem der Einheit von G.

Satz 3.2: *Freie kompakte $\mathbb{F}_p[[G]]$-Moduln und induzierte Moduln $M_G(X)$ für freie diskrete $\mathbb{F}_p$-Moduln X sind dual zueinander.*

Beweis: Im Sinne der Pontrjaginschen Dualitätstheorie ist $(\mathbb{F}_p[[G]])^\vee = Hom(\mathbb{F}_p[[G]], \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ die zu $\mathbb{F}_p[[G]]$ duale Gruppe.[6] Daher genügt es, Satz 3.2 in dem Spezialfall $X = \mathbb{F}_p$ zu beweisen, d.h., wir haben zu zeigen, dass $M_G(\mathbb{F}_p)$ isomorph zu $(\mathbb{F}_p[[G]])^\vee$ ist.
Es sei χ ein Charakter von $\mathbb{F}_p[[G]]$. Wir identifizieren die Untergruppe von $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, die durch $\frac{1}{p}$ erzeugt wird, mit $\mathbb{F}_p$. Sei $\varphi\chi$ die Einschränkung von $\chi : \mathbb{F}_p[[G]] \to \mathbb{F}_p$ auf G.
Die Abbildung $\varphi\chi$ liegt in $M_G(\mathbb{F}_p)$: In der Tat ist χ eine stetige Abbildung von $\mathbb{F}_p[[G]]$ in die diskrete Gruppe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Daher hängt χ nur von den Nebenklassen von $\mathbb{F}_p[[G]]$ modulo einem Ideal $I(U)$, $U \in \mathfrak{U}_G$, ab. Dann hängt $\varphi\chi$ nur von den Nebenklassen von G/U ab, d.h. $\varphi\chi$ ist stetig.
Desweiteren ist $\varphi : (\mathbb{F}_p[[G]])^\vee \to M_G(\mathbb{F}_p)$ ein G-Modulhomomorphismus.
Sei umgekehrt $f \in M_G(\mathbb{F}_p)$. f ist also eine stetige Funktion von G nach $\mathbb{F}_p$. Durch

$$\psi f(\textstyle\sum_{g\in G} x_g g) = \sum_{g\in G} f(g)x_g,\ x_g = 0 \text{ für fast alle } g \in G,$$

wird somit ein stetiger Charakter von $\mathbb{F}_p[G]$ definiert, der sich nach Satz 2.2 (ii) in eindeutiger Weise auf $\mathbb{F}_p[[G]]$ fortsetzen lässt.
Die so definierte Abbildung $\psi : M_G(\mathbb{F}_p) \to (\mathbb{F}_p[[G]])^\vee$ ist gerade die Umkehrabbildung von φ. Daraus folgt die Behauptung.

4 Charakterisierung der Pro-p-Gruppen der Dimension ≤ 2

Satz 4.1: *Es sei $1 \to R \to F \to G \to 1$ eine beliebige Darstellung der Pro-p-Gruppe G und A ein diskreter G-Modul. $H^1(R, A)$ werde als G-Modul betrachtet. Dann ist $H^1(G, H^1(R, A))$ isomorph zu $H^3(G, A)$.*

Beweis:
Wir zeigen zunächst, dass der G-Modul $H^1(R, M_G(A))$ induziert ist. Dazu konstruieren wir einen Isomorphismus φ von $H^1(R, M_G(A))$ auf $M_G(H^1(R, A))$:
Die Elemente von $H^1(R, M_G(A))$ und $M_G(H^1(R, A))$ sind Funktionen mit Argumenten aus $R \times G$. Wir setzen für $f \in H^1(R, M_G(A))$ $(\varphi f)(r, g) = f(\hat{g}^{-1}r\hat{g}, g)$, $r \in R$, $g \in G$, wobei $\hat{g}$ ein beliebiger Vertreter von g in F ist (die Abbildung ist wohldefiniert, denn jeder andere Vertreter von g in F unterscheidet sich nur um ein $r' \in R$ und $f((r'\hat{g})^{-1}r(r'\hat{g}), g) = f(\hat{g}^{-1}r'^{-1}rr'\hat{g}, g) = f(\hat{g}^{-1}r\hat{g}, g)$). Mit Hilfe der Umkehrabbildung sieht man, dass φ ein G-Modulisomorphismus ist. Also ist $H^1(R, M_G(A))$ ein induzierter Modul.
Die Sequenz

$$0 \to A \to M_G(A) \to C := M_G(A)/A \to 0$$

ist exakt.
Da R eine freie pro-p-Gruppe ist (also $H^2(R, A) = \{0\}$), ist dann auch

$$0 \to H^1(R, A) \to H^1(R, M_G(A)) \to H^1(R, C) \to 0$$

[6] Die duale Gruppe ist eine diskrete Torsionsgruppe. Genauer ist $^\vee$ ein exakter kontravarianter Funktor aus der Kategorie der abelschen proendlichen Gruppen auf die Kategorie der abelschen diskreten Torsionsgruppen und umgekehrt. Dem direkten Produkt proendlicher Gruppen entspricht dabei die direkte Summe diskreter Torsionsgruppen. Siehe Koch Absatz 1.4.

exakt. Hieraus und aus der Hochschild-Serre-Sequenz[7] ergibt sich folgendes exakte und kommutative Diagramm :

$$
\begin{tikzcd}
H^1(F, M_G(A)) \arrow[r, "Res"] \arrow[d] & H^0(G, H^1(R, M_G(A))) \arrow[r, "Tra"] \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
H^1(F, C) \arrow[r, "Res"] \arrow[d] & H^0(G, H^1(R, C)) \arrow[r, "Tra"] \arrow[d] & H^2(G, C) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 & H^1(G, H^1(R, A)) \arrow[r, dotted] \arrow[d] & H^3(G, A) \arrow[d] & \\
 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

Aus dem Diagramm ist ersichtlich, dass die Transgression von $H^0(G, H^1(R, C))$ auf $H^2(G, C)$ einen Isomorphismus von $H^1(G, H^1(R, A))$ auf $H^3(G, A)$ induziert. Somit folgt die Behauptung.

Durch die Festsetzung

$$\overline{r} \circ h = \overline{h^{-1} r h}, r \in R, h \in F,$$

wird $R/[R, R]R^p$ zu einem F-Rechtsmodul. Da die Wirkung von F nur von den Restklassen nach R abhängt, können wir $R/[R, R]R^p$ als G-Rechtsmodul betrachten.
Wir wollen nun den folgenden Satz beweisen:

Satz 4.2: *Es sei G eine Pro-p-Gruppe und*

$$1 \to R \to F \to G \to 1 (*)$$

eine minimale Darstellung von G. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

(i) G hat kohomologische Dimension ≤ 2.
(ii) $H^1(R)$ ist als G-Modul induziert.
(iii) $H^1(R) \simeq M_G(\prod_I \mathbb{F}_p)$
(iv) $R/[R, R]R^p \simeq \prod_I \mathbb{F}_p[[G]]$ als G-Rechtsmodul.
(v) $R/[R, R] \simeq \prod_I \mathbb{Z}_p[[G]]$ als G-Rechtsmodul.

Dabei ist I ein Indexsystem mit $\#I = \dim_{\mathbb{F}_p} H^2(G) = r(G)$.

[7]Hochschild-Serre-Sequenz (Koch): Ist $H^i(H, A) = \{0\}$ für $1 \leq i \leq n - 1$, dann ist die Sequenz $0 \to H^n(G/H, A^H) \overset{Inf}{\to} H^n(G, A) \overset{Res}{\to} H^n(H, A)^{G/H} \overset{Tra}{\to} H^{n+1}(G/H, A^H) \overset{Inf}{\to} H^{n+1}(G, A)$ exakt.

Beweis: Aus (iii) folgt (ii) ist offensichtlich und wegen Satz 4.1 folgt (i) aus (ii).
(i) $\Rightarrow$ (iii): Sei $\{r_{\mathrm{i}} \mid i \in I\}$ ein minimales Relationensystem von G bezüglich $(*)$. Wir definieren einen Homomorphismus $\varphi : H^1(R) \to M_G(X)$, wobei $X = \prod_I \mathbb{F}_p$, durch

$$(\varphi\pi)(g) = \Sigma_{i\in I}\pi(\tilde{g}^{-1}r_i\tilde{g}),\ \pi \in H^1(R),\ g \in G, \tag{$**$}$$

wobei $\tilde{g}$ ein Repräsentant von g in F ist.
Auf Grund der Bedingung (ii) in der Definition des Relationensystems verschwindet $\pi(\tilde{g}^{-1}r_i\tilde{g})$ für fast alle $i \in I$, d.h., die rechte Seite von $(**)$ ist definiert. Da π stetig ist, wegen $\pi \in H^1(R)$, gibt es einen offenen Normalteiler U von F, so dass π nur von den Nebenklassen von R modulo $R \cap U$ abhängt. $\varphi\pi$ hängt dann nur von den Nebenklassen von F/U ab und ist daher stetig. Die Abbildung φ ist ein G-Modulhomomorphismus und zudem injektiv:
Sei $(\varphi\pi)(g) = \Sigma_{i\in I}\pi(\tilde{g}^{-1}r_i\tilde{g}) = 0$. Da $\pi(\tilde{g}^{-1}r_i\tilde{g}) = 0$ für fast alle $i \in I$ und $\{r_{\mathrm{i}} \mid i \in I\}$ minimales Relationensystem von G ist, folgt $\pi(\tilde{g}^{-1}r_i\tilde{g}) = 0$ für alle $i \in I$. π ist also die Nullabbildung und φ somit injektiv.
Wir haben also eine exakte Sequenz

$$0 \to H^1(R) \overset{\varphi}{\hookrightarrow} M_G(X) \to C := M_G(X)/H^1(R) \to 0.$$

Die zugehörige Kohomologiesequenz liefert

$$0 \to H^1(R)^G \overset{\varphi*}{\to} M_G(X)^G \to C^G \to H^1(G, H^1(R)).$$

Nach Voraussetzung und wegen Satz 4.1 verschwindet $H^1(G, H^1(R))$. Wir wollen weiter zeigen, dass φ^* surjektiv ist und betrachten dazu die Abbildung

$$H^1(R) \to \bigoplus_{i\in I} H^1(R_i)$$

in dem Spezialfall, dass R_i die von r_i erzeugte Untergruppe von R ist. Da $\{r_{\mathrm{i}} \mid i \in I\}$ minimales Relationensystem ist, ist die natürliche Abbildung

$$H^1(R)^G \to \bigoplus_{i\in I} H^1(R_i)$$

nach Satz 1.3 ein Isomorphismus. Daraus folgt, dass es für jedes $i \in I$ ein $\pi \in H^1(R)^G$ mit $\pi(r_i) = \delta_{ij}$ in $\mathbb{F}_p$, $j \in I$, gibt. Also ist φ^* surjektiv, und daher verschwindet C^G. Wegen Hilfssatz 1.4 verschwindet dann auch C, woraus die Behauptung folgt.
Die Äquivalenz von (iii) und (iv) folgt aus Satz 3.2.
Desweiteren folgt (iv) aus (v) durch Faktorisieren nach Vielfachen von p.
Es bleibt also noch zu zeigen, dass (v) aus (iv) folgt: Sei 1_i das Einselement der i-ten Komponente von $\prod_I \mathbb{Z}_p[[G]]$. Durch die Festsetzung

$$1_i \mapsto r_i$$

, $i \in I, wird ein \mathrm{G}-Modulhomomorphismus \varphi : \prod_I \mathbb{Z}_p[[G]] \to R/[R,R]$ festgelegt, für den das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \prod_I \mathbb{Z}_p[[G]] & \xrightarrow{\varphi} & R/[R,R] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \prod_I \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[[G]] & \longrightarrow & R/[R,R]R^p \end{array}$$

kommutativ ist. Wir betrachten dieses Diagramm als Diagramm von Pro-p-Gruppen ohne Operatoren. Aus dem Burnsideschen Basissatz[8] folgt, dass φ ein minimales Erzeugendensystem von $\prod_I \mathbb{Z}_p[[G]]$ auf ein minimales Erzeugendensystem von $R/[R,R]$ abbildet. Da zudem R frei ist, wegen $R \subseteq F$ und F ist frei, ist φ ein Isomorphismus.

[8]Burnsidescher Basissatz (Satz 14 vom 1. Vortrag): Es sei G eine Pro-p-Gruppe und $E = \{s_i \mid i \in I\}$ eine Teilmenge von G mit der Eigenschaft, dass in jeder Umgebung der Einheit von G fast alle Elemente von E enthalten sind.
E ist genau dann Erzeugendensystem von G, wenn $\{s_i G^* \mid i \in I\}$ Erzeugendensystem von G/G^* ist.
Hierbei bezeichne $G^* = G^p[G,G]$ den Normalteiler von G, der von allen p-ten Potenzen und Kommutatoren von Elementen aus G erzeugt wird. G^* ist der kleinste Normalteiler N von G, für den G/N abelsch mit der Periode p ist.