p-KLASSENGRUPPEN UND p-KLASSENKÖRPERTÜRME

OLIVER THOMAS

1. Ziel

Für einen Zahlkörper k definieren wir seinen Klassenkörperturm wie folgt: Setze $k_0 = k$ und für $i > 0$ sei k_i der Hilbertsche Klassenkörper von k_{i-1}, also die maximal abelsche unverzweigte (Galois-)Erweiterung von k_{i-1}. Dann ergibt sich der Körperturm

$$k_0 \subseteq k_1 \subseteq k_2 \subseteq \dots$$

Wir fragen uns, ob dieser Körperturm stationär wird, oder äquivalent ob der Grad von $L^{\text{solv}} := \bigcup_i k_i$ über k endlich ist. Das erste Beispiel, dass dieser Grad nicht immer endlich ist, wurde von Golod und Šafarevič gegeben: $\mathbb{Q}\left(\sqrt{-2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19}\right)$ hat einen unendlichen Klassenkörperturm. Wir werden heute dieses Beispiel verifizieren und ferner bemerken, dass $\mathbb{Q}\left(\sqrt{-2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13}\right)$ es auch schon getan hätte. Dabei werden wir uns an Neukirch/Schmidt/Wingberg: Cohomology of Number Fields orientieren.

2. Vorbemerkungen

Um die gesamte Theorie der letzten Vorträge anwenden zu können, werden wir nicht direkt den Hilbertschen Klassenkörperturm betrachten, sondern stattdessen den zu k assoziierten p-Klassenkörperturm studieren, wir betrachten also

$$k = k_0 \subset k_1^{(p)} \subset k_2^{(p)} \subset \dots,$$

wobei $k_i^{(p)}$ die maximal abelsche unverzweigte p-Erweiterung von $k_{i-1}^{(p)}$ ist.

Zuerst müssen wir dafür feststellen, dass ein nicht abbrechender p-Klassenkörperturm auch einen nicht abbrechenden Klassenkörperturm impliziert.

Lemma 1. *Hat ein Zahlkörper k einen nicht-abbrechenden p-Klassenkörperturm, so hat er einen nicht-abbrechenden Klassenkörperturm.*

Beweis. Wir schließen induktiv. Offenbar gilt $k_1^{(p)} \subset k_1$ und für $k_n^{(p)} \subset k_n$ betrachten wir folgenden Körperturm:

$$\begin{tikzcd}
 & k_{n+1}k_nk_{n+1}^{(p)} \arrow[dl, dash] \arrow[dd, dash] & \\
k_{n+1} \arrow[dd, dash] & & \\
 & k_nk_{n+1}^{(p)} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
k_n \arrow[dr, dash] & & k_{n+1}^{(p)} \arrow[dl, dash] \\
 & k_n^{(p)} &
\end{tikzcd}$$

Wir wollen zeigen, dass $k_{n+1}k_nk_{n+1}^{(p)}$ über k_n abelsch und unverzweigt ist, denn dann folgt offenbar $k_{n+1}^{(p)} \subset k_{n+1}$. Das ist aber klar, da Komposita unverzweigter Erweiterungen unverzweigt sind und Komposita abelscher Erweiterungen abelsch sind. ∎

3. Konstruktion eines nicht-abbrechenden p-Klassenkörperturms

Satz 2. *Sei K/k eine endliche zyklische p-Erweiterung eines Zahlkörpers k und sei $S = \mathrm{Ram}(K/k) \cup S_\infty$, dann gilt:*

$$\dim_{\mathbb{F}_p} Cl(K)/p \geq \#S \setminus S_\infty(k) - r_1(k) - r_2(k) - \delta(k) + r_1'(k),$$

wobei wir folgende Notation benutzen: $\mathrm{Ram}(K/k)$ *sind die endlichen verzweigenden Stellen in k, $r_1(k)$ die Anzahl der reellen Primstellen, $r_2(k)$ die Anzahl der komplexen Primstellen, $\delta(k)$ wie üblich 1, falls die p-ten Einheitswurzeln in k enthalten sind und 0 sonst und $r_1'(k)$ die Anzahl der reellen Primstellen in k, die in K komplex werden.*

Beweis. Wesentlich für diese Abschätzung ist folgende exakte Sequenz:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_K^\times \longrightarrow \underbrace{\overbrace{\prod_{\mathfrak{P} \in S_\infty(K)} K_{\mathfrak{P}}^\times}^{I_\infty} \times \overbrace{\prod_{\mathfrak{P} \in S \setminus S_\infty(K)} U_{\mathfrak{P}}}^{U_{S\setminus S_\infty}}}_{\Pi} \longrightarrow C_S(K) \longrightarrow Cl(K) \longrightarrow 0$$

Hier ist

$$C_S(K) = \frac{I_K}{K^\times U_{K,S}} = \frac{I_K}{K^\times \prod_{\mathfrak{P}\in S}\{1\} \times \prod_{\mathfrak{P}\notin S} U_{\mathfrak{P}}}.$$

Setzen wir jetzt noch $G = G(K/k)$, schneiden obige Sequenz nach dem zweiten Term ab, ergänzen den Quotienten und wenden dann Tate-Kohomologie an, so ergibt sich folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \hat{H}^0(G,\mathcal{O}_K^\times) \arrow[r] \arrow[d] & \hat{H}^0(G,\Pi) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & \hat{H}^0(G,\Pi/\mathcal{O}_K^\times) \arrow[r] & \cdots \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & \hat{H}^0(G,\Pi) \arrow[r] & C \arrow[r] \arrow[u, hook] & 0
\end{tikzcd}$$

Hier sind A und C so gewählt, dass die untere Zeile exakt ist und die Quadrate kommutieren. Nun ist für abelsche Gruppen $A/p \cong A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p$ und bekanntermaßen ist $- \otimes \mathbb{Z}/p$ rechtsexakt. Damit ergibt sich wiederum eine exakte Sequenz

$$T \longrightarrow A/p \longrightarrow \hat{H}^0(G,\Pi)/p \longrightarrow C/p \longrightarrow 0.$$

Die Objekte, die in der letzen Sequenz auftauchen, sind allesamt $\mathbb{F}_p$-Vektorräume und wir können daher ganz einfach Dimensionen abschätzen. Damit ergibt sich

$$\dim A/p + \dim C/p \geq \dim \hat{H}^0(G,\Pi)/p.$$

Aus der Rechtsexaktheit von $- \otimes \mathbb{Z}/p$ folgt, dass für einen Quotienten A einer endlich abelschen Gruppe H die Abschätzung $\dim A/p \leq \dim H/p$ gilt. Angewandt auf unsere Situation ergibt das

$$\dim \hat{H}^0(G,\mathcal{O}_K^\times)/p + \dim C/p \geq \dim \hat{H}^0(G,\Pi)/p.$$

Aus dem Elementarteilersatz folgt, dass falls C eine Untergruppe einer endlich erzeugten abelschen Gruppe H ist, dann die Abschätzung $\dim C/p \leq \dim H/p$ gilt. Setzen wir diese Bausteine zusammen, ergibt sich letztlich die erste für uns relevante Abschätzung

$$d_p(\hat{H}^0(G,\Pi/\mathcal{O}_K^\times)) := \dim_{\mathbb{F}_p}(\hat{H}^0(G,\Pi/\mathcal{O}_K^\times)/p) \geq d_p(\hat{H}^0(G,\Pi)) - d_p(\hat{H}^0(G,\mathcal{O}_K^\times))$$

Bekanntlich ist

$$\hat{H}^i(G,C_S(K)) \cong \hat{H}^i(G,C_K),$$

da die Sequenz

$$0 \longrightarrow U_{K,S} \longrightarrow C_K \longrightarrow C_S(K) \longrightarrow 0$$

exakt ist und $U_{K,S}$ für K/k unverzweigt außerhalb von S kohomoglogisch trivial ist (insbesondere ist auch $\hat{H}^0(G, U_{K,S}) = 0$). Klassenkörpertheorie liefert dann

$$d_p(\hat{H}^0(G, C_S(K))) = d_p(G^{ab}) = d_p(G) = 1.$$

Schließlich brauchen wir noch eine Abschätzung für $d_p(\hat{H}^0(G, \mathcal{O}_K^\times))$. Diese schenkt uns der Einheitensatz:

$$\hat{H}^0(G, \mathcal{O}_K^\times) = \frac{(\mathcal{O}_K^\times)^G}{N} = \frac{\mathcal{O}_k^\times}{N} \cong \frac{\mathbb{Z}^{r_1+r_2-1} \times \mu(k)}{N}$$

Brutales Abschätzen ergibt

$$d_p(\hat{H}^0(G, \mathcal{O}_K^\times)) \leq r_1 + r_2 - 1 + \delta = \#S_\infty(k) - 1 + \delta,$$

da die nicht-$p$ten Einheitswurzeln beim Übergang zu Modulo p verschwinden.

Jetzt wollen wir alle diese Teilabschätzungen zusammensetzen:

$$\begin{aligned} d_p(Cl(K)) \geq & d_p(\hat{H}^{-1}(G, Cl(K)) \\ \geq & d_p(\hat{H}^0(G, \Pi/\mathcal{O}_K^\times)) - d_p(\hat{H}^0(G, C_S(K))) \\ \geq & d_p(\hat{H}^0(G, \Pi)) - d_p(\hat{H}^0(G, \mathcal{O}_K^\times)) - 1 \\ \geq & \sum_{\mathfrak{p} \in S_\infty(k)} d_p(\hat{H}^0(K_\mathfrak{P}/k_\mathfrak{p}, K_\mathfrak{P}^\times)) + \sum_{\mathfrak{p} \in S \setminus S_\infty(k)} d_p(\hat{H}^0(K_\mathfrak{P}/k_\mathfrak{p}, U_\mathfrak{P})) \\ & - \#S_\infty(k) + 1 - \delta - 1 \end{aligned}$$

Die erste Abschätzung folgt aus

$$d_p(\hat{H}^{-1}(G, Cl(K))) = d_p(\hat{H}^1(G, Cl(K)) \leq d_p(\mathcal{Z}^1(G, Cl(K))) = d_p(Cl(K)),$$

die zweite Abschätzung aus einem ähnlichen Argument wie oben (Übergang von der exakten Sequenz zur Tate-Kohomologie), die dritte Abschätzung ist einfaches Einsetzen der vorigen Abschätzungen und die vierte Abschätzung ist Shapiros Lemma. Die jetzt auftretenden Terme sind uns aus lokaler Klassenkörpertheorie bekannt: Es ist

$$1 \longrightarrow \mathrm{N}_{K_\mathfrak{P}/k_\mathfrak{p}} U_\mathfrak{P} \longrightarrow U_\mathfrak{p} \xrightarrow{(\ ,k_\mathfrak{p})} T_{\mathfrak{P}/\mathfrak{p}} \longrightarrow 1$$

exakt und folglich $\#\hat{H}^0(K_\mathfrak{P}/k_\mathfrak{p}, U_\mathfrak{P}) = e_{\mathfrak{P}/\mathfrak{p}}$. Nach Voraussetzung verzweigen alle endlichen Stellen in S, womit die Abschätzung

$$\sum_{\mathfrak{p} \in S \setminus S_\infty(k)} d_p(\hat{H}^0(K_\mathfrak{P}/k_\mathfrak{p}, U_\mathfrak{P})) \geq \#S \setminus T(k)$$

gilt. Die unendlichen Terme sind immer 0 oder 1 – abhängig davon, ob die Stellen in der Erweiterung verzweigen oder nicht, also

$$\sum_{\mathfrak{p} \in S_\infty(k)} d_p(\hat{H}^0(K_\mathfrak{P}/k_\mathfrak{p}, K_\mathfrak{P}^\times)) = r_1'(k)$$

nach Definition von $r_1'(k)$ als die reellen Stellen von k, die in K komplex werden. Ferner ist $\#T(k) = r_1(k) + r_2(k)$ klar, womit sich insgesamt die Behauptung ergibt. ∎

Dieser Satz gibt einen Ansatz, wie wir Erweiterungen mit großem p-Rang der Idealklassengruppe konstruieren. Es ergibt sich zum Beispiel unmittelbar:

Korollar 3. *Ist $K/\mathbb{Q}$ ein quadratischer Zahlkörper und wieder $S = \mathrm{Ram}(K/\mathbb{Q}) \cup S_\infty$, dann ist*

$$\dim_{\mathbb{F}_2} Cl(K)/2 \geq \begin{cases} \#S \setminus S_\infty - 2 & \textit{für } K \textit{ reell} \\ \#S \setminus S_\infty - 1 & \textit{sonst} \end{cases}$$

Beweis. $\delta(\mathbb{Q}) = r_1(\mathbb{Q}) + r_2(\mathbb{Q}) = 1$ und $r_1'(\mathbb{Q}) = 0$ genau dann, wenn K reell ist. ∎

Beispiel 4. Betrachten wir unser Beispiel vom Anfang, so ist für

$$K = \mathbb{Q}(\sqrt{-2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19})$$

ganz offenbar $S = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \infty\}$ und damit insgesamt

$$\dim_{\mathbb{F}_2} Cl(K)/2 \geq 8 - 1 = 7$$

Nachdem wir jetzt gesehen haben, wie wir einen großen p-Rang erzwingen können, wollen wir nun sehen, wie wir diese Größe ausnutzen können, um einen nicht abbrechenden Klassenkörperturm zu konstruieren. Zur Wiederholung zuerst folgender Satz von letzter Woche:

Satz 5. *Sind S und T endliche Stellenmengen eines Zahlkörpers k und p prim, dann gelten*

$$h^1(G_S^T(p)) = 1 + \sum_{\mathfrak{p} \in S \setminus (T \cup S_{\mathbb{C}})} \delta_{\mathfrak{p}} - \delta + \dim_{\mathbb{F}_p} \text{Б}_{S \setminus T}^{S \cup T}(k) + \sum_{\mathfrak{p} \in (S \setminus T) \cap S_p} [k_{\mathfrak{p}} : \mathbb{Q}_p] - r_1 - r_2$$

und

$$h^2(G_S^T(p)) \leq \sum_{\mathfrak{p} \in S \setminus (T \cup S_{\mathbb{C}})} \delta_{\mathfrak{p}} - \delta + \dim_{\mathbb{F}_p} \text{Б}_{S \setminus T}^{S \cup T}(k) + \theta,$$

wobei $\theta = 1$ falls $\delta = 1$ und $S \subset S_{(p)}$, $S_{(p)} = S_{\mathbb{C}}$ für $p = 2$ und $S_{(p)} = S_\infty$ sonst.

Damit können wir jetzt endlich folgendes zeigen:

Satz 6. *Sei $L(p)$ die maximale unverzweigte p-Erweiterung von k. Es ist $L(p)/k$ unendlich, falls*

$$\dim_{\mathbb{F}_p} Cl(k)/p \geq 2 + 2\sqrt{r_1(k) + r_2(k) + \delta(k)}.$$

Beweis. Sei G die Galois-Gruppe von $L(p)/k$. Angenommen, diese Gruppe wäre endlich, dann implizierte der Satz von Golod und Šafarevič die Ungleichung

$$\frac{1}{4} h^1(G)^2 < h^2(G),$$

was durch elementare Termumformung zu

$$\left(h^1(G) - 2\right)^2 < 4\left(h^2(G) - h^1(G) + 1\right)$$

wird. Aus der obigen Abschätzung wissen wir, dass

$$h^2(G) - h^1(G) + 1 \leq \theta - 1 + r_1 + r_2 + 1 = r_1 + r_2 + \delta,$$

nach Definition von θ. Damit ergibt sich insgesamt

$$\left(h^1(G) - 2\right)^2 < 4\left(\delta + r_1 + r_2\right)$$

bzw.

$$h^1(G) < 2 + 2\sqrt{\delta + r_1 + r_2}.$$

Klassenkörpertheorie aber sagt uns, dass $h^1(G)$ und $\dim_{\mathbb{F}_p} Cl(k)/p$ übereinstimmen:

$$\begin{aligned} h^1(G) &= \dim H^1(G, \mathbb{Z}/p) \\ &= \dim \mathrm{Hom}(G, \mathbb{Z}/p) \\ &= \dim \mathrm{Hom}(Cl(k), \mathbb{Z}/p) \\ &= \dim Cl(k)/p, \end{aligned}$$

womit schließlich

$$\dim Cl(k)/p < 2 + 2\sqrt{r_1 + r_2 + \delta}$$

folgt. ■

Beispiel 7. $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19})$ hat einen nicht abbrechenden 2-Klassenkörperturm, denn

$$2 + 2\sqrt{r_1(K) + r_2(K) + \delta(K)} = 2 + 2\sqrt{0 + 1 + 1} = 2 + 2\sqrt{2} < 7 \leq \dim_{\mathbb{F}_2} Cl(K)/2.$$