Globale p-Erweiterungen

Christian Pehle Tom Wunder

1. Juli 2010

Im Folgenden bezeichnen p und q Primzahlen.

1 Die maximale p-Erweiterung eines endlichen globalen Körpers

Nachdem im letzten Vortrag die maximale p-Erweiterung eines endlichen lokalen Körpers untersucht und eine explizite Darstellung durch Erzeuger und eine Relation der zugehörigen Galoisgruppe gewonnen wurde, möchten wir dieses Wissen nutzen, um die Galoisgruppe G_S der maximalen, außerhalb einer Primstellenmenge S unverzweigten, p-Erweiterung eines endlichen globalen Körpers k zu beschreiben.

Sei also k ein endlicher globaler Körper (d.h. eine endliche Erweiterung von $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{F}_q(X)$) und betrachte zunächst die maximale p-Erweiterung $\hat{k}$ von k. Bezeichne mit G die zugehörige Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(\hat{k}/k)$. Für jede Primstelle $\mathfrak{p}$ kann man die Vervollständigung $k_\mathfrak{p}$ von k bezüglich $\mathfrak{p}$ bilden, sowie die maximale p-Erweiterung $\hat{k}_\mathfrak{p}$ von $k_\mathfrak{p}$ betrachten. Die zugehörige Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(\hat{k}_\mathfrak{p}/k_\mathfrak{p})$ sei mit $G_\mathfrak{p}$ bezeichnet.

Jede Einbettung $\psi_\mathfrak{p}\colon \hat{k} \hookrightarrow \hat{k}_\mathfrak{p}$ liefert eine Injektion $\varphi_\mathfrak{p}\colon G_\mathfrak{p} \hookrightarrow G$, die jedem Automorphismus aus $\hat{k}_\mathfrak{p}$ seine Einschränkung auf $\hat{k}$ zuordnet und welche ihrerseits eine Abbildung $\varphi_\mathfrak{p}^*\colon H^\nu(G) \to H^\nu(G_\mathfrak{p})$ für jedes $\nu \in \mathbb{N}$ induziert.

Bemerkung 1.1. Diese ist unabhängig von der Wahl der Einbettung.

Beweis. Sei $\psi'_\mathfrak{p}\colon \hat{k} \hookrightarrow \hat{k}_\mathfrak{p}$ eine weitere Einbettung, nach dem Fortsetzungssatz für Isomorphismen ([1] 3.13) existiert ein $\gamma\colon \hat{k}_\mathfrak{p} \to \hat{k}_\mathfrak{p}$, sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} \hat{k} \arrow[r, hook, "\psi_\mathfrak{p}"] \arrow[dr, hook, "\psi'_\mathfrak{p}"'] & \hat{k}_\mathfrak{p} \arrow[d, "\exists\gamma"] \\ & \hat{k}_\mathfrak{p} \end{tikzcd}$$

Aus diesem erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} G & G_\mathfrak{p} \arrow[l, hook', "\varphi_\mathfrak{p}"'] \\ & G_\mathfrak{p} \arrow[u, "\bar{\gamma}\colon \tau \mapsto \gamma^{-1}\tau\gamma"'] \arrow[ul, hook', "\varphi'_\mathfrak{p}"] \end{tikzcd}$$

und die Konjugation $\gamma^*\colon H^\nu(G_\mathfrak{p}) \to H^\nu(G_\mathfrak{p})$ ist die Identität ([3] Kapitel 1 §6.3). □

Wähle im Folgenden eine Primstelle $\mathfrak{P}$ von $\hat{k}$ über $\mathfrak{p}$ und sei $\varphi_\mathfrak{p}\colon G_\mathfrak{p} \to G$ der durch die Einbettung $\hat{k} \to \hat{k}_\mathfrak{P} \to \hat{k}_\mathfrak{p}$ induzierte Homomorphismus.

Die folgenden Überlegungen sind durch die in Vortrag 3 ausgeführten Resultate über die Darstellung von pro-p Gruppen motiviert. Für jede Primstelle $\mathfrak{p}$ von k betrachten wir eine minimale Darstellung

$$1 \to R_\mathfrak{p} \to F_\mathfrak{p} \to G_\mathfrak{p} \to 1$$

von $G_\mathfrak{p}$ und bezeichnen mit $\mathcal{T}_\mathfrak{p}$ die Trägheitsgruppe von $\hat{k}_\mathfrak{p}/k_\mathfrak{p}$. Können wir zeigen, dass $(\varphi_\mathfrak{p}\colon G_\mathfrak{p} \to G)$ zulässig bezüglich $(T_\mathfrak{p})$ ist, so erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & R_\mathfrak{p} \arrow[r] \arrow[d, "\bar{\chi}_\mathfrak{p}"'] & F_\mathfrak{p} \arrow[r] \arrow[d, "\chi_\mathfrak{p}"'] & G_\mathfrak{p} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_\mathfrak{p}"'] & 1 \\ 1 \arrow[r] & R \arrow[r] & F \arrow[r] & G \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

für jedes $\mathfrak{p}$ und wir wissen, dass die Relationen R erzeugt werden durch $\bigcup \chi_\mathfrak{p}(R_\mathfrak{p})$, zusammen mit einer minimalen Ausnahmemenge E. Ist

$$\varphi^*\colon H^2(G) \to \bigoplus_\mathfrak{p} H^2(G_\mathfrak{p})$$

die von den Homomorphismen $\varphi_\mathfrak{p}$ induzierte Abbildung, so können wir unter Verwendung der Hochschildt-Serre Sequenz folgern, dass $\dim_{\mathbb{F}_p} \operatorname{kern} \varphi^* = \#E$ ist (siehe [1] Satz 6.11).

Bemerkung 1.2. Die Familie $(\varphi_\mathfrak{p})$ ist zulässig bezüglich $(\mathcal{T}_\mathfrak{p})$

Beweis. Per Definition ist $\mathcal{T}_\mathfrak{p}$ Normalteiler von $G_\mathfrak{p}$ und wir wissen, dass für endliche Primstellen $G_\mathfrak{p}/T_\mathfrak{p} \simeq \mathbb{Z}_p$, also frei, ist. Es bleibt zu zeigen, dass in jedem offenen Normalteiler U von G fast alle $\varphi_\mathfrak{p}(\mathcal{T}_\mathfrak{p})$ liegen. Nun ist $\varphi_\mathfrak{p}(\mathcal{T}_\mathfrak{p}) = T_\mathfrak{P} \subseteq \hat{k}$ ([2] Kapitel 2 §8.9) und $\hat{k}^{\mathcal{T}_\mathfrak{P}}$ der maximale Zwischenkörper in dem $\mathfrak{P}$ unverzweigt ist. Da $\hat{k}^U/k$ eine endliche Körpererweiterung ist ([1] Theorem 2.8), werden dort nur endlich viele Primstellen verzweigen. Folglich liegt, für fast alle $\mathfrak{p}$, $\hat{k}^U$ in $\hat{k}^{\mathcal{T}_\mathfrak{P}}$ und damit $\varphi(\mathcal{T}_\mathfrak{p})$ in U. □

Damit erhalten wir, unter Verwendung von Satz 6.11 aus [1], eine wohldefinierte Abbildung

$$\varphi^*\colon H^2(G) \to \bigoplus_\mathfrak{p} H^2(G_\mathfrak{p}).$$

Wenn $\mathfrak{p}|\infty$ ist $H^2(G_\mathfrak{p}) \neq 0$ genau dann, wenn $p = 2$ und $\mathfrak{p}$ reell ist.

Theorem 1.3. *Die induzierte Abbildung φ^* ist injektiv, dass heißt $\#E = 0$.*

Beweis. Wir werden den Beweis in mehreren Schritten führen, für den Fall $\chi(k) = p$ ist (fast) nichts zu zeigen. Nehmen wir an, dass k die p-ten Einheitswurzeln enthält ($\delta(k) = 1$) und $\chi(k) \neq p$, so lässt sich die Aussage im wesentlichen auf das Hassesche lokal-global Prinzip und lokale Klassenkörpertheorie zurückführen. Schließlich werden wir den allgemeinen Fall auf den zuvor betrachteten Spezialfall reduzieren.

1. Fall $\chi(k) = p$. Nach Theorem 9.1 ist G frei und damit $H^2(G) = 0$, also ist φ^* die Nullabbildung.

2. Fall $\chi(k) \neq p$ und $\delta(k) = 1$. Wir möchten das Hassesche lokal-global Prinzip verwenden. Betrachte dafür das folgende Diagramm in der Kategorie $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd}
\{G, \mathbb{F}_p\} \arrow[r, "(\varphi_{\mathfrak{p}}, \mathrm{id})"] \arrow[d, "(\mathrm{id}, a \mapsto \zeta_p^a)"'] & \{G_{\mathfrak{p}}, \mathbb{F}_p\} \arrow[d, "(\mathrm{id}, a \mapsto \zeta_p^a)"] \\
\{G, \hat{k}^\times) \arrow[r, "(\varphi_{\mathfrak{p}}, \psi_p)"] & \{G_{\mathfrak{p}}, \hat{k}_{\mathfrak{p}}^\times\}
\end{tikzcd}$$

Aus diesem erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
H^2(G) \arrow[r, "\varphi^*"] \arrow[d] & \bigoplus_{\mathfrak{p}} H^2(G_{\mathfrak{p}}) \arrow[d] \\
H^2(G, \hat{k}^\times)[p] \arrow[r, "\iota"] & \bigoplus_{\mathfrak{p}} H^2(G_{\mathfrak{p}}, \hat{k}_{\mathfrak{p}}^\times)[p]
\end{tikzcd}$$

wobei die vertikalen Pfeile Isomorphismen sind (siehe [1] 9.2). Es bleibt also zu zeigen, dass ι wohldefiniert und injektiv ist. In der Tat ist dem Hasseschen lokal-global Prinzip zufolge die Sequenz

$$0 \to H^2(G, K^\times) \to \bigoplus_{\mathfrak{p}} H^2(\mathcal{Z}'_{\mathfrak{P}}, K_{\mathfrak{P}}^\times) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

exakt für jede endliche p-Erweiterung K/k mit $Z'_{\mathfrak{P}} = \mathrm{Gal}(K_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}})$. Dies überträgt sich durch Bildung des direkten Limes auf die maximale p-Erweiterung $\hat{k}/k$, wobei $\mathcal{Z}_{\mathfrak{P}} = \mathrm{Gal}(\hat{k}_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}})$ ist (siehe [1] §8.10 und §3.17). Folglich erhalten wir eine Injektion

$$H^2(G, \hat{k}^\times) \hookrightarrow \bigoplus_{\mathfrak{p}} H^2(\mathcal{Z}_{\mathfrak{P}}, \hat{k}_{\mathfrak{P}}^\times)$$

Außerdem induziert die Einbettung $\hat{k}_{\mathfrak{P}} \hookrightarrow \hat{k}_{\mathfrak{p}}$ einen Isomorphismus

$$\varphi_{\mathfrak{P}}^* \colon H^2(\mathcal{Z}_{\mathfrak{P}}, \hat{k}_{\mathfrak{P}}^\times)[p] \to H^2(G_{\mathfrak{p}}, \hat{k}_{\mathfrak{p}}^\times)[p].$$

In der Tat ist die Erweiterung $\hat{k}_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}}$ per Definition normal und damit

$$\inf\colon H^2(\mathcal{Z}_{\mathfrak{P}}, \hat{k}_{\mathfrak{P}}^{\times}) \to H^2(G_{\mathfrak{p}}, \hat{k}_{\mathfrak{p}}^{\times})$$

injektiv ([1] Satz §8.9 (iii)). Weiter bleibt die Abbildung zwischen den p-Anteilen

$$\varphi_{\mathfrak{P}}^{*}\colon H^2(\mathcal{Z}_{\mathfrak{P}}, \hat{k}_{\mathfrak{p}}^{\times})[p] \to H^2(G_{\mathfrak{p}}, \hat{k}_{\mathfrak{p}}^{\times})[p]$$

injektiv. Es handelt sich um eine Abbildung zyklischer Gruppen, deren Ordnung p teilt. Da $\hat{k}_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}}$ nicht trivial für endliche Stellen $\mathfrak{p}$ ist, folgt $H^2(\mathcal{Z}_{\mathfrak{P}}, \hat{k}_{\mathfrak{P}}^{\times})[p] = p$, also ist $\varphi_{\mathfrak{P}}^{*}$ ein Isomorphismus.

3. Fall $\chi(k) \neq p$ und $\delta(k) = 0$. Wir erweitern k um die p-ten Einheitswurzeln $k' = k(\zeta_p)$ und bezeichnen mit G' die Galoisgruppe von $\hat{k}'/k'$. Sei $\mathfrak{p}'$ eine Primstelle von k'. Wir erhalten die natürlichen Morphismen $G' \to G$ und $G_{\mathfrak{p}'} \to G_{\mathfrak{p}}$ für $\mathfrak{p}'|\mathfrak{p}$, diese induzieren Abbildungen $\theta_{\mathfrak{p}'}^{*}\colon H^2(G_{\mathfrak{p}}) \to H^2(G'_{\mathfrak{p}})$ und wir erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
H^2(G) \arrow[r, "\varphi^*"] \arrow[d, "\inf"'] & \bigoplus_{\mathfrak{p}} H^2(G_{\mathfrak{p}}) \arrow[d, "\theta^*"] \\
H^2(G') \arrow[r, "\varphi'^*"] & \bigoplus_{\mathfrak{p}'} H^2(G_{\mathfrak{p}'})
\end{tikzcd}$$

wobei $\mathfrak{p}'$ alle Primstellen von k' durchläuft und θ^* gegeben ist durch

$$\alpha_{\mathfrak{p}} \in H^2(G_{\mathfrak{p}}) \mapsto \bigoplus_{\mathfrak{p}'|\mathfrak{p}} \theta_{p'}(\alpha_{\mathfrak{p}}).$$

Die vertikalen Pfeile sind injektiv (siehe [1] §9.6). Folglich ist mit $\varphi^{*'}$ auch φ^* injektiv.

$\square$

Theorem 1.4. *Es sei $\mathfrak{q}$ eine beliebige Primstelle von k und*

$$\varphi_{\mathfrak{q}}^{*}\colon H^2(G) \to \bigoplus_{\mathfrak{p}\neq\mathfrak{q}} H^2(G_{\mathfrak{p}})$$

die Abbildung, welche durch auslassen von $H^2(G_{\mathfrak{q}})$ in der Bildgruppe, aus φ^* entsteht. Für $\delta(k) = 1$ ist $\varphi_{\mathfrak{q}}^{*}$ injektiv.

Beweis. Es genügt zu bemerken, dass die Abbildung

$$H^2(G, \hat{k}^{\times})[p] \hookrightarrow \bigoplus_{\mathfrak{p}\neq\mathfrak{q}} H^2(G_{\mathfrak{p}}, \hat{k}_{\mathfrak{p}}^{\times})[p]$$

injektiv bleibt. $\square$

2 Die maximale p-Erweiterung mit beschränkter Verzweigung

Wir wollen im folgenden versuchen, die Sätze 1.1 und 1.2 auf den Fall der maximalen p-Erweiterung mit beschränkter Verzweigung übertragen.
Dazu sei S eine beliebige Menge von Primstellen des globalen Körpers k. Betrachte dazu das Körperdiagramm:

$$\begin{tikzcd}
\hat{k} \arrow[d, dash] \arrow[dd, dash, dashed, bend left=40, "G"] \\
k_S \arrow[d, dash] \arrow[d, dash, dashed, bend right=50, "G_S"'] \\
k
\end{tikzcd}$$

Hier bezeichne k_S die maximale p-Erweiterung, die nur für die Stellen $\mathfrak{p} \in S$ verzweigt sind, d.h. unverzweigt außerhalb von S. Dies ist das Kompositum aller p-Erweiterungen, die nur in S verzweigen.
Folgende Stellen können in einer p-Erweiterung nicht verzweigen:

1. Endliche Primstellen (Primdivisoren) mit $\#\mathcal{O}/\mathfrak{p} = \mathfrak{N}(\mathfrak{p}) \not\equiv 1$.
   Denn dann folgte $\delta(k_\mathfrak{p}) = 0$ und mit ([1], §8.5) ist damit $\mathfrak{p}$ ist unverzweigt.
2. Komplexe Primstellen per Definition
3. Reelle Primstellen für $p \neq 2$

Durch Entfernen dieser Primstellen erhalten wir eine Menge $S_{\min}$. Sei nun ohne Einschränkung $S = S_{\min}$. Wieder haben wir die *Lokalisierungsabbildung*

$$\varphi_S^\star : H^2(G_S) \longrightarrow \bigoplus_{\mathfrak{p} \in S} H^2(G_\mathfrak{p})$$

Diese wird induziert durch $\varphi_\mathfrak{p} : G_\mathfrak{p} \hookrightarrow G \twoheadrightarrow G_S$ für $\mathfrak{p} \in S$.

Definition 2.1. Der Kern $\ker \varphi_S^\star$ der Lokalisierungsabbilung heißt *Tate-Shafarevich-Gruppe* und wird mit $Ш_S$ bezeichnet.
Die *Kummer-Gruppe* ist definiert durch

$$\begin{aligned}
V_S := \ker\Big(k^\times/k^{\times\mathfrak{p}} \to \prod_{\mathfrak{p} \in S} k^\mathfrak{p}/k_\mathfrak{p}^{\times\mathfrak{p}} \times \prod_{\mathfrak{p} \notin S} k_\mathfrak{p}^\times/E_\mathfrak{p} k_\mathfrak{p}^{\times\mathfrak{p}}\Big) \\
= \{\alpha \in k^\times \mid \alpha \in k_\mathfrak{p}^{\times p} \text{ für } \mathfrak{p} \in S \text{ und } \alpha \in E_\mathfrak{p} k_\mathfrak{p}^{\times p} \text{ für } \mathfrak{p} \notin S\} \\
= \{\alpha \in k^\times \mid \alpha \in k_\mathfrak{p}^{\times p} \text{ für } \mathfrak{p} \in S \text{ und } (\alpha) = \mathfrak{a}^p\}
\end{aligned}$$

wobei (α) das α zugewiesene Hauptidel bezeichne. Es sei

$$Б_S := Char(V_S)$$

Bemerkung 2.2. $Б_S$ ist eine endliche Gruppe.

Beweis. Sei zunächst $S = \varnothing$ Dann ist $V_\varnothing = \{\alpha \in k^\times \mid \alpha \in E_\mathfrak{p} k_\mathfrak{p}^{\times p}$ für alle $\mathfrak{p}\}/k^{\times p}$ Betrachte den Homomorphismus

$$\kappa : \{\alpha \in k^\times \mid (\alpha) = \mathfrak{a}^p\} \longrightarrow Cl(k)[p],\ \alpha \mapsto \mathfrak{a} \text{ mit } (\alpha) = \mathfrak{a}^p$$

Dann ist das Bild von κ

$$\begin{aligned} \operatorname{im} \kappa &= \{\mathfrak{a} \in Cl(k) \mid \mathfrak{a}^p = (\alpha)\} \\ &= \{\mathfrak{a} \in Cl(k) \mid \mathfrak{a} \equiv 0 \quad \text{mod Hauptideale}\} \\ &= Cl(k)[p] \end{aligned}$$

Daher ist κ ist surjektiv. Es liegt $k^{\times p} \subseteq V_\varnothing$ und außerdem im $\ker \kappa$, da $\kappa(\alpha^p) = (\alpha) \equiv 0$ mod Hauptideale. Deswegen faktorisiert κ über $k^{\times p}$.
Bezeichne E die Einheitengruppe von $k^\times$. Der Kern $\ker \kappa$ ist gleich $E/E_\mathfrak{p}$, denn

1. (i) Für $u \in E/E_\mathfrak{p}$ ist $\kappa(u) = (1) \equiv 0$ mod Hauptideale.
2. (ii) Für $u \in \ker \kappa$ ist $\kappa(u) = \mathfrak{a}$ ein Hauptideal, wobei wir den Vertreter von $\mathfrak{a}$ aus E wählen können, also $(u) = \mathfrak{a} = (\beta)^p$, also $u = v \cdot \beta^p,\ v \in E$ und damit $u \equiv v$ mod E^p.

Wir haben damit eine exakte Sequenz von $\mathbb{F}_p$-Vektorräumen

$$0 \longrightarrow E/E^p \longrightarrow V_\varnothing \longrightarrow Cl(k)[p] \longrightarrow 0$$

Damit ergibt sich

$$\dim_{\mathbb{F}_p} Б_\varnothing = \dim_{\mathbb{F}_p} V_\varnothing = \dim_{\mathbb{F}_p} Cl(k)[p] + \dim_{\mathbb{F}_p} E/E^p < \infty$$

Nun gilt für $S_2 \subseteq S_1 :\ V_{S_1} \subseteq V_{S_2}$, woraus die Behauptung folgt.

$\square$

Wir wollen unsere Anstrengungen nun auf den folgenden Satz lenken, der ein Hauptresultat in der Theorie der pro-p-Gruppen darstellt.

Satz 2.3. *Es gibt eine natürliche Injektion von* $Ш_S \hookrightarrow Б_S$*.*

Beweis. Zuerst einige Notationen:

- $\mathfrak{p}$ bezeichne eine Primstelle von k,
- $\mathfrak{P}$ eine Primstelle in $\hat{k}$ über $\mathfrak{p}$.
- $\mathfrak{T}_S \triangleleft G = Gal(\hat{k}/k)$, der von den Trägheitsgruppen $\mathfrak{T}_\mathfrak{P}$ für $\mathfrak{P} \mid \mathfrak{p}$, $\mathfrak{p} \notin S$ erzeugt wird

Es gilt für $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}' \mid \mathfrak{p} : \mathfrak{P} = \sigma \mathfrak{P}' \sigma^{-1}$ für ein $\sigma \in G$. Die Trägheitsgruppen $\mathfrak{T}_{\mathfrak{P}}$ und $\mathfrak{T}_{\mathfrak{P}'}$ sind daher konjugiert zueinander. Mithilfe von [1] Theorem 8.3 ergibt sich $\hat{k}^{\mathfrak{T}_S} = k_S$
Es ergibt sich eine exakte Sequenz:

$$0 \longrightarrow \mathfrak{T}_S \longrightarrow G \longrightarrow G_S = G/\mathfrak{T}_S \longrightarrow 0$$

Wenden wir auf diese Theorem 3.14 (exakte 5-Term-Sequenz) an, bekommen wir die exakte Sequenz

$$H^1(G) \xrightarrow{\text{res}} H^1(\mathfrak{T}_S)^{G_S} \xrightarrow{\text{tra}} H^2(G_S) \xrightarrow{\text{inf}} H^2(G)$$

Betrachte nun das Diagramm:

$$\begin{tikzcd} H^2(G_S) \arrow[r, "\text{inf}"] \arrow[d, "\varphi_S^\star"'] & H^2(G) \arrow[d, "\varphi^\star"] \\ \bigoplus_{\mathfrak{p} \in S} H^2(G_\mathfrak{p}) \arrow[r, "\text{inj}"] & \bigoplus_\mathfrak{p} H^2(G_\mathfrak{p}) \end{tikzcd}$$

Dieses ist kommutativ, denn wir haben für $\mathfrak{p} \notin S$ das kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd} G_\mathfrak{p} \arrow[r, "\varphi_\mathfrak{p}"] \arrow[d] & G \arrow[d] \\ G_\mathfrak{p}/\mathfrak{T}_\mathfrak{p} \arrow[r, "\varphi'_\mathfrak{p}"] & G_S \end{tikzcd}$$

wobei $\varphi'_\mathfrak{p}$ durch $\varphi'_\mathfrak{p} : G_\mathfrak{p}/\mathfrak{T}_S \hookrightarrow G/\mathfrak{T}_\mathfrak{P} \twoheadrightarrow G/\mathfrak{T}_S$ gegeben ist. Dieses ist wohldefiniert, da $\varphi_\mathfrak{p}(\mathfrak{T}_\mathfrak{p}) = \mathfrak{T}_\mathfrak{P}$

Nun ist $G_\mathfrak{p}/\mathfrak{T}_\mathfrak{p} \cong \mathcal{Z}_p$ oder $\{1\}$, je nachdem, ob die Stelle $\mathfrak{p}$ endlich oder unendlich ist. In beiden Fällen ist allerdings $H^2(G_\mathfrak{p}/\mathfrak{T}_S) = \{0\}$, da sowohl $\mathcal{Z}_p$ als auch $\{1\}$ freie Gruppen sind. Gehen wir nun zu den induzierten Abbildungen in obigem Diagramm über, so bekommen wir das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} H^2(G_S) \arrow[r, "\text{inf}"] \arrow[d] & H^2(G) \arrow[d, "\varphi_\mathfrak{p}^\star"] \\ \{0\} = H^2(G_\mathfrak{p}/\mathfrak{T}_\mathfrak{p}) \arrow[r, "\text{inf}"] & H^2(G_\mathfrak{p}) \end{tikzcd}$$

D.h. $\varphi_\mathfrak{p}^\star \circ \text{inf} = 0$ für $\mathfrak{p} \notin S$. Mit anderen Worten ist das obige Diagramm kommutativ.

Da $\varphi^\star$ nach Theorem 11.1 injektiv ist, ergibt sich

$$Ш_S = \ker \varphi_S^\star = \ker \inf$$

Dann ist die Sequenz

$$H^1(G) \xrightarrow{\text{res}} H^1(\mathfrak{T}_S)^{G_S} \xrightarrow{\text{tra}} Ш_S \xrightarrow{\text{inf}} 0$$

exakt.

Da die Dualgruppenbildung exakt ist, ergibt sich durch Dualisieren die exakte Sequenz:

$$0 \longrightarrow Char(Ш_S) \longrightarrow Char(H^1(\mathfrak{T}_S)^{G_S}) \longrightarrow Char(H^1(G))$$

Nun gilt:

1. i)

$$\begin{aligned} H^1(G) &= Char(G/G^p[G,G]), \text{ da} \\ H^1(G) &= Hom_{cts}(G, \mathbb{F}_p) \\ &= Hom_{cts}(G/G^p[G,G], \mathbb{F}_p) \\ &= Char(G/G^p[G,G]), \text{ da } \mathbb{F}_p \text{ abelsch und } G^p \text{ im Kern jedes Homomor. liegt} \end{aligned}$$

2. ii)

$$\begin{aligned} H^1(\mathfrak{T}_S)^{G_S} &= Char(\mathfrak{T}_S/\mathfrak{T}_S^p[\mathfrak{T}_S, G]), \text{ denn} \\ H^1(\mathfrak{T}_S)^{G_S} &= Hom_{cts}(\mathfrak{T}_S, \mathbb{F}_p)^{G_S} \\ &= Hom_{cts}(\mathfrak{T}_S, \mathbb{F}_p)^{G/\mathfrak{T}_S} \end{aligned}$$

Für $\varphi \in Hom_{cts}(\mathfrak{T}_S, \mathbb{F}_p)$ und $g\mathfrak{T}_S \in G/\mathfrak{T}_S, g \in G, t \in \mathfrak{T}_S$ gilt

$$\begin{aligned} (g\varphi)(t) &= g\varphi(g^{-1}t) \\ &= \varphi(g^{-1}tg), \text{ da } \mathfrak{T}_S \circlearrowleft G \text{ per Konjugation} \\ &= \varphi(t) \end{aligned}$$

Das bedeutet $\varphi(t^{-1}g^{-1}tg) = 0 \in \mathbb{F}_p$, $[\mathfrak{T}_S, G] \in \ker \varphi \ \forall \varphi$ und schließlich

$$H^1(\mathfrak{T}_S)^{G_S} = Char(\mathfrak{T}_S/\mathfrak{T}_S^p[\mathfrak{T}_S, G])$$

Deswegen transformiert sich unsere exakte Sequenz zu

$$0 \longrightarrow Char(Ш_S) \longrightarrow \mathfrak{T}_S/\mathfrak{T}_S^p[\mathfrak{T}_S, G] \xrightarrow{\psi} G/G^p[G,G]$$

wobei ψ durch die Einbettung $\mathfrak{T}_S \hookrightarrow G$ induziert wird.

Wir definieren nun einen surjektiven Morphismus

$$\chi : \prod_{\mathfrak{p} \notin S} \mathfrak{T}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{T}_{\mathfrak{p}}^p[\mathfrak{T}_{\mathfrak{p}}, G_{\mathfrak{p}}] \longrightarrow \mathfrak{T}_S/\mathfrak{T}_S^p[\mathfrak{T}_S, G]$$

Wir haben für jede Primstelle $\mathfrak{p}$ einen Homomorphismus $\varphi_{\mathfrak{p}} : G_{\mathfrak{p}} \hookrightarrow G$, der die Trägheitsgruppe $\mathfrak{T}_{\mathfrak{p}}$ surjektiv auf die Trägheitsgruppe $\mathfrak{T}_{\mathfrak{P}}$ der über $\mathfrak{p}$ liegenden Primstelle $\mathfrak{P}$ abbildet.

Sei nun $U \subseteq G$ eine offene normale Untergruppe. Dann ist die nach Galoistheorie zu U gehörige Erweiterung $\hat{k}^U/k$ eine endliche Körpererweiterung, in der nur endlich viele Primstellen verzweigen können. Fast alle Primstellen sind somit unverzweigt und für fast alle Primstellen liegt damit $\mathfrak{T}_{\mathfrak{P}} \subseteq U$. Sei nun $(\tau_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \notin S} \in \prod_{\mathfrak{p} \notin S} \mathfrak{T}_{\mathfrak{p}}$. Dann ist $\prod_{\mathfrak{p} \notin S} \varphi_{\mathfrak{p}} \tau_{\mathfrak{p}} := \left(\prod_{\mathfrak{p} \notin S} \varphi_{\mathfrak{p}} \tau_{\mathfrak{p}} U \right)_U$ ein wohldefiniertes Element in

$$G = \lim_{\leftarrow} G/U,$$

wobei der projektive Limes über alle offenen Normalteiler U von G läuft. Da

$$\varphi_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{T}_{\mathfrak{p}}) = \mathfrak{T}_{\mathfrak{P}},$$

liegt

$$\prod_{\mathfrak{p} \notin S} \varphi_{\mathfrak{p}} \tau_{\mathfrak{p}} \in \mathfrak{T}_S$$

Wir setzen nun

$$\chi\big((\overline{\tau_{\mathfrak{p}}})_{\mathfrak{p} \notin S}\big) = \prod_{\mathfrak{p} \notin S} \overline{\varphi_{\mathfrak{p}} \tau_{\mathfrak{p}}}$$

Nun gilt es noch zu beachten, dass

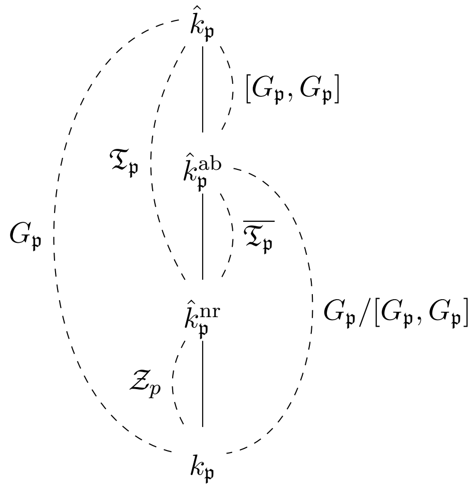
$$\varphi_{\mathfrak{p}}(\tau_{\mathfrak{p}}) \in \mathfrak{T}_S^p[\mathfrak{T}_S, G] \text{ für } \tau_{\mathfrak{p}} \in \mathfrak{T}_{\mathfrak{p}}^p[\mathfrak{T}_{\mathfrak{p}}, G_{\mathfrak{p}}]$$

Damit haben wir den gewünschten Homomorphismus definiert. Dieser ist zudem surjektiv, da $\mathfrak{T}_S$ das Erzeugnis aller $\mathfrak{T}_{\mathfrak{P}}$ ist und diese die Bilder der $\mathfrak{T}_{\mathfrak{p}}$ unter $\varphi_{\mathfrak{p}}$ sind.

Da $G_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{T}_{\mathfrak{p}}$ zyklisch ist, gilt $[\mathfrak{T}_{\mathfrak{p}}, G_{\mathfrak{p}}] = [G_{\mathfrak{p}}, G_{\mathfrak{p}}]$. Dies verifiziert man leicht durch eine längere Rechnung.

Nun besitzen die Gruppen $\mathfrak{T}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{T}_{\mathfrak{p}}^p[\mathfrak{T}_{\mathfrak{p}}, G_{\mathfrak{p}}]$ und $G/G^p[G, G]$ auch eine klassenkörpertheoretische Interpretation.

Zunächst betrachten wir das Körperdiagramm für den lokalen Fall:



Dabei ist $\overline{\mathfrak{T}_{\mathfrak{p}}} = \mathfrak{T}_{\mathfrak{p}}/[G_{\mathfrak{p}}, G_{\mathfrak{p}}] = \mathfrak{T}_{\mathfrak{p}}/[\mathfrak{T}_{\mathfrak{p}}, G_{\mathfrak{p}}]$. Wir haben das lokale Normrestsymbol

$$(\ , k) : k_{\mathfrak{p}}^{\times} \longrightarrow G^{\mathrm{ab}},$$

welches ein Isomorphismus ist, der die Einheitengruppe $E_{\mathfrak{p}} \subset k_{\mathfrak{p}}^{\times}$ isomorph auf die Trägheitsgruppe $\mathfrak{T}_{\mathfrak{p}}/[\mathfrak{T}_{\mathfrak{p}}, G_{\mathfrak{p}}]$ abbildet. Wenn man nun noch die p-Potenzen herausteilt, ergibt sich der Isomorphismus

$$E_{\mathfrak{p}}/E_{\mathfrak{p}}^p \cong \mathfrak{T}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{T}_{\mathfrak{p}}^p[\mathfrak{T}_{\mathfrak{p}}, G_{\mathfrak{p}}]$$

Im globalen Fall liegt der Fall ähnlich. Wegen des globalen Normrestsymbols haben wir einen Isomorphismus

$$(\ , k) : C_K/C_K^p \longrightarrow G^{\mathrm{ab}}/G^p = G/G^p[G, G],$$

da $N_{\hat{k}/k} C_{\hat{k}} C_K^p = C_K^p$ Außerdem ist $C_K/C_K^p = J/J_K k^{\times}$, wobei C_K die Idelklassengruppe und $J = J(k)$ die Idelgruppe bezeichnet.

Wegen der Verträglichkeit des lokalen und globalen Normrestsymbols ist folgendes Diagramm kommutativ:

$$\begin{tikzcd}
\prod_{\mathfrak{p} \notin S} \mathfrak{T}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{T}_{\mathfrak{p}}^p[\mathfrak{T}_{\mathfrak{p}}, G_{\mathfrak{p}}] \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "\wr"'] & \mathfrak{T}_S/\mathfrak{T}_S^p[\mathfrak{T}_S, G] \arrow[r, "\psi"] & G/G^p[G, G] \arrow[d, "\wr"] \\
\prod_{\mathfrak{p} \notin S} E_{\mathfrak{p}}/E_{\mathfrak{p}}^p \arrow[rr, "\eta"] & & J/J^p k^{\times}
\end{tikzcd}$$

η wird durch die Einlagerung $\prod_{\mathfrak{p} \notin S} E_{\mathfrak{p}} \hookrightarrow J$ induziert. Nun ist

$$\ker \eta \cong \ker \psi \circ \chi$$

und

$$\ker \psi \circ \chi \twoheadrightarrow \ker \psi,$$

da $\chi(\ker \psi \circ \chi) = \chi(\chi^{-1}(\ker \psi)) = \ker \psi$.
Nun berechnen wir $\ker \eta$:
Sei U_S die Gruppe aller Idele von $k_\mathfrak{p}$, deren Komponenten für $\mathfrak{p} \in S$ gleich 1 und für $\mathfrak{p} \notin S$ Einheiten sind. Dabei werden für eine unendliche Primstelle $\mathfrak{p}$ alle Elemente von $k_\mathfrak{p}^\times$ als Einheiten betrachtet. Dann ist

$$f : \prod_{\mathfrak{p} \notin S} E_\mathfrak{p}/E_\mathfrak{p}^p \cong U_S J^p/J^p$$

Diese Abbildung ist induziert durch die natürlichen Einbettungen:

$$\prod_{\mathfrak{p} \notin S} E_\mathfrak{p} \hookrightarrow U_S \hookrightarrow U_S J^p$$

Sie ist injektiv, denn sei für $\mathfrak{p} \notin S$ $x_\mathfrak{p} \in E_\mathfrak{p} \backslash E_\mathfrak{p}^p$, so folgt $f(x_\mathfrak{p}) = y^p$ für $y \in k_\mathfrak{p}^\times$. Das Element y ist aber bereits in $E_\mathfrak{p} \subseteq k_\mathfrak{p}^\times$, da $0 = \nu_\mathfrak{p}(x_\mathfrak{p}) = p\nu_\mathfrak{p}(y) = 0$. Andererseits ist f auch surjektiv, denn sei $\alpha \in U_S J^p$, so lässt sich α schreiben als $\alpha_1\alpha_2$ mit $\alpha_1 \in U_S$ und $\alpha_2 \in J^p$. Nun existiert aber ein $\tilde{\alpha} \in E_\mathfrak{p}$ mit $f(\tilde{\alpha}) \equiv \alpha \mod J^p$.

Das bedeutet, folgendes Diagramm ist weiterhin kommutativ:

$$\begin{tikzcd}
\prod_{\mathfrak{p} \notin S} \mathfrak{T}_\mathfrak{p}/\mathfrak{T}_\mathfrak{p}^p[\mathfrak{T}_\mathfrak{p}, G_\mathfrak{p}] \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "\wr"'] & \mathfrak{T}_S/\mathfrak{T}_S^p[\mathfrak{T}_S, G] \arrow[r, "\psi"] & G/G^p[G,G] \arrow[d, "\wr"] \\
U_S J^p/J^p \arrow[rr, "\eta"] & & J/J^p k^\times
\end{tikzcd}$$

Es gelten nun die folgenden Isomorphien, wie sich leicht nachrechnen lässt:

$$\begin{aligned}
\ker \eta &\cong (U_S J^P \cap J^p k^\times)/J^p \\
&\cong (U_S J^p \cap k^\times)/(J^p \cap k^\times) \\
&= V_S
\end{aligned}$$

Die erste Isomorphie ist trivial. Bei der zweiten gilt es zu beachten, dass

$$U_S J^p \cap J^p k^\times = (U_S J^p \cap k^\times) J^p$$

ist. Für die dritte Isomorphie gilt außerdem die Identität

$$J^p \cap k^\times = k^{\times p}$$

Wir halten wegen $\ker \eta \twoheadrightarrow \ker \psi$ den Epimorphismus

$$V_S \twoheadrightarrow Char(\text{Ш}_S)$$

Dualisieren ergibt die Behauptung

$$Ш_S \hookrightarrow Б_S$$

□

Literatur

[1] Helmut Koch. *Galoissche Theorie der p-Erweiterungen*. Number 10 in Mathematische Monographien ; 10 ; Mathematische Monographien. Dt. Verl. d. Wiss., Berlin, 1970. 1, 2, 3, 4, 5, 7

[2] Jürgen Neukirch, editor. *Algebraische Zahlentheorie*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2006. In: Springer-Online. 2

[3] Jürgen Neukirch, Alexander Schmidt, and Kay Wingberg. *Cohomology of number fields*. Number 323 in Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen ; 323 ; Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen. Springer, Berlin ; Heidelberg, 2. ed. edition, 2008. 2