Seminarankündigung
- Klassenkörpertürme -

Prof. Dr. K. Wingberg
J. Bartels

für das Sommersemester 2010

Thema

Jede endliche Erweiterung $k/\mathbb{Q}$ hat eine Klassenzahl h_k, welche genau dann 1 ist, wenn ihr Ganzheitsring $\mathcal{O}_k$ ein Hauptidealring ist. Wie man in einer Vorlesung zur Algebraischen Zahlentheorie lernt, ist dies beispielsweise für $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-23})$ nicht der Fall. Eine bekannte Frage lautet, ob sich ein solcher Körper k in einen anderen Zahlkörper K einbetten läßt, dessen Klassenzahl verschwindet ($h_K = 1$). Das verallgemeinerte (= Artinsche) Reziprozitätsgesetz der Klassenkörpertheorie liefert einen Isomorphismus zwischen der (nach Dirichlet endlichen) Klassengruppe Cl_k und der Galoisgruppe G_1 der maximalen unverzweigten abelschen Erweiterung k_1/k (dem Hilbertschen Klassenkörper zu k), insbesondere ist $h_k = [k_1 : k]$. Der Hauptidealsatz besagt, daß jedwedes Ideal des Ganzheitsrings $\mathcal{O}_k$ in $\mathcal{O}_{k_1}$ zu einem Hauptideal wird. Nichtdestotrotz kann es im letztgenannten Ring Ideale geben, welche nicht von einem Element erzeugt werden; es sei also k_2 der Hilbertsche Klassenkörper von k_1. Man erhält so iterativ den Hilbertschen Klassenkörperturm

$$k \subset k_1 \subset k_2 \subset k_3 \subset ...$$

Es ist unklar, wie dieser Prozeß endet. Die Vereinigung $k_\infty = \bigcup k_i$ kann endlich sein, also:

> Es gibt genau dann eine Körpererweiterung K/k mit Klassenzahl $h_K = 1$, wenn k_∞/k endlich ist.

Ähnlich verhält es sich, wenn anstatt k_1 wie oben nur die größte unverzweigte abelsche p-Erweiterung $k_1(p)$ genommen wird, wobei p eine fest gewählte Primzahl ist.

$$k \subset k_1(p) \subset k_2(p) \subset k_3(p) \subset ...,$$

ist dann der Hilbertsche p-Klassenkörperturm. Anhand dessen können ebenso hinreichende Bedingungen bzgl. der Unendlichkeit der Erweiterung k_∞/k gegeben werden. Der Vorteil dabei ist, daß über p-Gruppen viel mehr bekannt ist, als über Gruppen allgemein. Daher ist es nicht verwunderlich, daß sich die ersten Beispiele unendlicher Hilbertscher Klassenkörpertürme aus den Arbeiten der sowjetischen Mathematiker Golod und Schafarewitsch, genauer aus deren Untersuchungen der p-Gruppen ergaben.

Inhalt

Eine gegebene pro-p-Gruppe G wird von $r_1 = dim_{\mathbb{F}_p}(H^1(G, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}))$ Elementen erzeugt, zwischen denen genau $r_2 = dim_{\mathbb{F}_p}(H^2(G, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}))$ Relationen die Struktur der Gruppe vollständig beschreiben. Die erste Aussage ist Konsequenz des Burnsideschen Basissatzes, die zweite eine Folge des Umstands, daß jede Gruppe Quotient einer freien ist. Für endliche p-Gruppen hat r_2 eine an r_1 gekoppelte untere Schranke, gegeben durch die bedeutende Ungleichung von Golod und Schafarewitsch. Diese zu etablieren bedarf der intensiven Auseinandersetzung mit den pro-p-Gruppen, was den ersten Teil des Seminars ausmachen wird.

Im Anschluß daran sollen die Hauptergebnisse der Klassenkörpertheorie in zwei Übersichtsvorträgen vorgestellt werden, die den zahlentheoretischen Hintergrund für die weiteren Vorträge liefern werden.

Der dritte Teil liefert die Synthese der vorangegangenen. Gegenstand sind lokale sowie globale $p-$Erweiterungen. In beiden Fällen liegt der Fokus auf der Galoisgruppe $G_k(p)$ der maximalen pro-p-Erweiterung von k sowie im globalen Fall zusätzlich auf der $G_S(p)$, der Gruppe der maximalen außerhalb einer Stellenmenge S unverzweigten p-Erweiterung von k. Dabei kommen die gruppentheoretischen Argumente des ersten Teils zur Anwendung. Nimmt man eine an hinreichend vielen Stellen verzweigte $p-$Erweiterung $k/\mathbb{Q}$, dann widerspräche die Endlichkeit des Klassenkörperturms den gruppentheoretischen Überlegungen des ersten Teils des Seminars. Durch diese Kontraposition ist am Schluß des Seminars der Schluß möglich, daß es durchaus nicht abbrechende Klassenkörpertürme gibt.

Voraussetzungen/Adressaten

Nachdem nun grob umrissen wurde, worum es im Sommersemester gehen soll, ein paar Bemerkungen zur Zielgruppe und zu den Teilnahmevoraussetzungen. Neben dem Interesse, sich ein solches Thema selbständig zu erarbeiten und einen Vortrag darüber halten zu wollen, sind Kenntnisse der Algebraischen Zahlentheorie I unabkömmlich. Vorkenntnisse in Klassenkörpertheorie sind erwünscht, aber nicht zwingend erforderlich. Angehenden Diplomanden aber auch Interessierten der Arithmetik sei die Teilnahme hiermit sehr empfohlen.
Interessenten können sich direkt melden: bartels@mathi.uni-heidelberg.de

Auf Anfrage wird ein vorläufiges Semesterprogramm gern zugeschickt. Die Vortragseinteilung erfolgt in einer noch anzukündigenden Vorbesprechung am Ende des Semesters.

gez.: J. Bartels.