Inhaltsverzeichnis

1 Quadratische Formen über $\mathbb{Q}_p$ 2

1.1 Die zwei Invarianten . . . 2

1.1.1 Theorem 5 . . . 2

1.2 Repräsentation eines Elements von K durch eine quadratische Form . . . 3

1.2.1 Lemma . . . 3

1.2.2 Korollar zu Theorem 6: . . . 4

1.2.3 Theorem 6 . . . 5

1.3 Klassifikation . . . 7

1.3.1 Theorem 7 . . . 7

1.3.2 Korollar . . . 8

1.3.3 Proposition 6 . . . 9

1.3.4 Korollar . . . 10

1.4 Der reelle Fall . . . 10

1 Quadratische Formen über $\mathbb{Q}_p$

In diesem Paragraphen sei p eine Primzahl und K der p-adische Körper $\mathbb{Q}_p$.
Alle Quadratischen Formen und Quadratischen Module seien über K und nicht ausgeartet.

1.1 Die zwei Invarianten

Sei (V, Q) ein Quadratisches Modul vom Rang n und $d(Q) \in K^*/K^{*2}$ seine Diskriminante. Sei $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ eine orthogonale Basis von V. Wir setzen $a_i = e_i.e_i$ und erhalten $d(Q) = a_1 \cdot a_2 \dots a_n \in K^*/K^{*2}$ und setzen $\epsilon(e) = \prod_{i<j}(a_i, a_j)$. Man erhält $\epsilon(e) = \pm 1$.

1.1.1 Theorem 5

Die Zahl ϵ hängt nicht von der Wahl der orthogonalen Basis ab.

Beweis:

1. $\underline{n=1}$ $\quad \Rightarrow \epsilon(e) = 1$ (per Konvention)

2. $\underline{n=2}$ $\quad \Rightarrow \epsilon(e) = 1 \Leftrightarrow Z^2 - a_1X^2 - a_2Y^2 \equiv 0 \overset{Theorem\ x}{\Leftrightarrow} a_1X^2 + a_2Y^2 \equiv 1$
$\overset{Theorem\ x}{\Leftrightarrow} \exists v \in V$ mit $Q(v) = 1$
und dies hängt nicht von der Wahl der orthogonalen Basis ab.

3. $\underline{n=3}$ $\quad$ Induktion nach n
Nach Theorem 2 genügt es zu zeigen: $\epsilon(e) = \epsilon(e')$ für e und e' benachbart.
Da das Hilbertsymbol symmetrisch ist, verändert sich $\epsilon(e)$ nicht, wenn wir e_1 permutieren. Daher können wir annehmen, dass $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$ derartig ist, dass $e'_1 = e_1 \Rightarrow a_1 = a'_1$.
Man kann $\epsilon(e)$ in folgender der Form schreiben:
$$\epsilon(e) = (a_1, a_2 \dots a_n) \prod_{2 \le i < j} (a_i, a_j) = (a_1, d(Q)a_1) \prod_{2 \le i < j} (a_i, a_j)$$
Ähnlich:
$$\epsilon(e') = (a_1, a_2 \dots a_n) \prod_{2 \le i < j} (a'_i, a'_j) = (a_1, d(Q)a_1) \prod_{2 \le i < j} (a'_i, a'_j)$$
die induktive Hypothese zeigt, dass
$$\prod_{2 \le i < j} (a_i, a_j) = \prod_{2 \le i < j} (a'_i, a'_j)$$

gilt, woraus das verlangte Resultat folgt.

Von nun an schreiben wir $\epsilon(Q)$ anstelle von $\epsilon(e)$.
Wenn f eine quadratische Form in n Variablen ist und wenn $f \sim a_1X_1^2 + a_2X_2^2 + \cdots + a_nX_n^2$ gilt, dann sind die zwei Elemente

$$d(f) = a_1 \dots a_n \in k^*/k^{*2}$$
$$\epsilon(f) = \prod_{i<j}(a_i, a_j) \in \{\pm 1\}$$

Invarianten der Äquivalenzklassen von f.

1.2 Repräsentation eines Elements von K durch eine quadratische Form

1.2.1 Lemma

1. Die Anzahl der Elemente im $\mathbb{F}_2$-Vektorraum K^*/K^{*2} ist 2^r mit $r = 2$ für $p \neq 2$ und $r = 3$ für $p = 2$.
2. Wenn $a \in K^*/K^{*2}$ ist und $\epsilon = \pm 1$, sei $H_a^\epsilon = \{x \in K^*/K^{*2} : (x, a) = \epsilon\}$. Wenn $a = 1$ besitzt H_a^1 gleich 2^r Elemente und $H_a^{-1} = \varnothing$ und wenn $a \neq 1$ ist, besitzt H_a^1 gleich 2^{r-1} Elemente.
3. Sei $a, a' \in K^*/K^{*2}$ und $\epsilon, \epsilon' = \pm 1$. Angenommen H_a^ϵ und $H_{a'}^{\epsilon'}$ sind nicht leer. Für $H_a^\epsilon \cap H_{a'}^{\epsilon'} = \varnothing$ ist es hinreichend und notwendig, dass $a = a'$ und $\epsilon = -\epsilon'$.

Beweis:

1. ${\mathbb{Q}_p}^*/{\mathbb{Q}_p}^{*^2} \cong \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$, falls $p \neq 2$
   und ${\mathbb{Q}_p}^*/{\mathbb{Q}_p}^{*^2} \cong \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$, falls $p = 2$.

2. a) $\underline{a = 1}$ $\Rightarrow$ $H_1^1 = \{x \in K^*/K^{*2};\ (x, a) = 1\} = K^*/K^{*2}$
   $\Rightarrow$ $\sharp H_1^1 = 2^r$ $\Rightarrow$ $H_1^{-1} = \varnothing$

   b) $\underline{a \neq 1}$ betrachte: α: $K^*/K^{*2} \to \{\pm 1\}$, $\alpha(b) = (a, b)$
   $\Rightarrow$ α ist ein Homomorphismus, da das Hilbertsymbol eine Bilinearform ist.
   Kern(α)=$\{x \in K^*/K^{*2};$ x ist Quadrat$\}$=H_a^1
   Nach der Dimensionformel für Vektorräume gilt:
   $\dim_{\mathbb{F}_2}(\text{Kern}(\alpha)) + \dim_{\mathbb{F}_2}(\{\pm 1\}) = \dim_{\mathbb{F}_2}(K^*/K^{*2})$
   $\Rightarrow \dim_{\mathbb{F}_2}(\text{Kern}(\alpha)) + 1 = \dim_{\mathbb{F}_2}(K^*/K^{*2})$
   $\Rightarrow$ Kern(α) ist eine Hyperfläche von K^*/K^{*2}
   $\Rightarrow \sharp\text{Kern}(\alpha) \cdot \sharp\{\pm 1\} = \sharp K^*/K^{*2}$
   $\Rightarrow 2^r = 2 \cdot 2^{r-1}$
   $\Rightarrow \sharp H_a^1 = \sharp H_a^{-1} = 2^{r-1}$

3. a) " $\Rightarrow$ "

   Vor.: $H_a^\epsilon \cap H_{a'}^{\epsilon'} = \varnothing$

   Bekannt: $\sharp H_a^1 = 2^{r-1} = \sharp H_{a'}^{\epsilon'}$

   Ann.: $H_a^1 = H_{a'}^1$, $\{x \in K^*/K^{*2};\ (x,a) = 1\} = \{x \in K^*/K^{*2};\ (x,a') = 1\}$

   $\Rightarrow$ $(x,a) = (x,a')$ $\forall x \in K^*/K^{*2}$

   $\Rightarrow$ $a = a$ (da das Hilbertsymbol injektiv ist)

   $\Rightarrow$ $\epsilon = -\epsilon'$ (da sonst $H_a^1 \cap H_a^1 = \varnothing$, Widerspruch zur Ann.).

   b) " $\Leftarrow$ "

   Vor.: $a = a'$, $\epsilon = -\epsilon'$

   $\Rightarrow H_a^\epsilon \cap H_{a'}^{\epsilon'} = H_a^\epsilon \cap H_a^{-\epsilon} = \varnothing$

Ab jetzt: f ist quadratische Form vom Rang n, $d = d(f)$ und $\epsilon = \epsilon(f)$.

Bemerkung:

$a \in K^*/K^{*2}$; $f_a = f - az^2$;
$f \equiv a \iff f_a \equiv 0$
$\Rightarrow$ $d(f_a) = -ad(f)$, $\epsilon(f_a) = (-a,d)\epsilon(f)$

Beweis:

$$d(f_a) = a_1 \dots a_n(-a) = d(f)(-a)$$

$$\epsilon(f_a) = \prod_{i<j}(a_i,a_j) = \prod_{i<j<n+1}(a_i,a_j)(a_1 \dots a_n, -a) = \epsilon(f)(-a,d)$$

1.2.2 <u>Korollar zu Theorem 6:</u>

$a \in K^*/K^{*2}$;
$f \equiv a \iff$

1. <u>$n = 1$</u>: $a = d$
2. <u>$n = 2$</u>: $(a,-d) = \epsilon$
3. <u>$n = 3$</u>: $(a \neq d)$ oder $(a = -d$ und $(-1,-d) = \epsilon)$
4. <u>$n \geq 4$</u>

Anmerkung: $a \neq -d \iff$ es ex. kein $x \in K^*/K^{*2}$: $a = x^2(-d)$

Beweis: (hierbei beschränken wir uns auf $n \leq 2$)

1. <u>$n = 1$</u> $f \sim ax^2 \iff d(f) = a$

2. $\underline{n=2}$ $f \sim a_1{x_1}^2 + a_2{x_2}^2$
$f \equiv a \quad \Longleftrightarrow \quad f_a = f - az^2 \equiv 0 \quad (Rang(f_a) = 3)$
$\Longleftrightarrow$ (nach Theorem 6) $\quad (-1, -d(f_a)) = \epsilon(f_a)$
bekannt: $d(f_a) = -ad(f); \epsilon(f_a) = (-a, d)\epsilon(f)$
$\epsilon(f)(-a, -d(f)) = (-1, -d(f_a)) = (-1, (-d(f))(-a))$
$\Longleftrightarrow \quad (-1,-1)(-1, d(f))(-1, a)(-1,-1) = (-a, d(f))\epsilon(f)$
$\Longleftrightarrow \quad (-1, d(f))(-1, a) = \epsilon(f)(-1, d(f))(a, d(f))$
$\Longleftrightarrow \quad (-1, a) = \epsilon(f)(a.d(f))$
$\Longleftrightarrow \quad (-1, a)(a, d(f)) = \epsilon(f)$
$\Longleftrightarrow \quad (a, -d(f)) = \epsilon(f)$

1.2.3 <u>Theorem 6</u>

$f \equiv 0 \quad \Longleftrightarrow$

1. $\underline{n=2} \quad d = -1$
2. $\underline{n=3} \quad (-1, -d) = \epsilon$
3. $\underline{n=4} \quad (d \neq 1)$ oder $(d = 1$ und $\epsilon = (-1,-1))$
4. $\underline{n \geq 5}$

Beweis:

1. $\underline{n=2}$: $\quad f \sim a_1{x_1}^2 + a_2{x_2}^2$
$f \equiv 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a_1{x_1}^2 + a_2{x_2}^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{a_1}{a_2}{x_1}^2 = {x_2}^2 \quad \Longleftrightarrow$
$-\frac{a_1}{a_2}$ ist ein Quadrat $\quad \Longleftrightarrow \quad 1 = -\frac{a_1}{a_2}{a_2}^2 = -a_1 a_2 = -d \quad \Longleftrightarrow$
$d = -1$

2. $\underline{n=3}$: $\quad f \sim a_1{x_1}^2 + a_2{x_2}^2 + a_3{x_3}^2$
$f \equiv 0$
$\Longleftrightarrow \quad -a_3 f \sim -a_3a_1{x_1}^2 - a_3a_2{x_2}^2 - a_3a_3{x_3}^2 = 0$
$\Longleftrightarrow \quad -a_3a_1{x_1}^2 - a_3a_2{x_2}^2 - {x_3}^2 = 0$
$\Longleftrightarrow \quad -a_3a_1{x_1}^2 - a_3a_2{x_2}^2 = {x_3}^2$
$\Longleftrightarrow \quad (-a_3a_1, -a_3a_2) = 1$
$\Longleftrightarrow \quad (-1,-1)(-1, a_1)(a_2, -1)\underbrace{(a_3, a_3)}_{(-1,a_3)}(a_3, a_2)(a_1, a_3)(a_1, a_2) = 1$
$\Longleftrightarrow \quad (-1,-1)(-1, \underbrace{a_1a_2a_3}_{d})\underbrace{(a_1, a_2)(a_2, a_3)(a_1, a_3)}_{\epsilon(f)} = 1$
$\Longleftrightarrow \quad (-1, -d)\epsilon(f) = 1$
$\Longleftrightarrow \quad (-1, -d) = \epsilon(f)$

3. $\underline{n=4}$ (nach Prop $3'$ Kor 2)
$0 = f = g - h \quad \Longleftrightarrow \quad$ es ex. $x \in K^*/K^{*2}$:

$g \sim a_1{x_1}^2 + a_2{x_2}^2 = x$ und
$h \sim -a_3{x_3}^2 - a_4{x_4}^2 = x$

(nach Korollar zu Th. 6):
$g, h \equiv x$
$\iff$ $\underline{n=2}$: $(x, -d) = \epsilon$
$\iff$ $(x, -a_1a_2) = (a_1, a_2)$ und $(x, -a_3a_4) = (-a_3, -a_4)$

A:=$\{ x \in K^*/K^{*2},\ (x, -a_1a_2) = (a_1, a_2)\}$ und
B:=$\{ x \in K^*/K^{*2},\ (x, -a_3a_4) = (-a_3, -a_4)\}$
$A, B \neq \varnothing$, da $a_1 \in A$ und $-a_3 \in B$
klar: $f \equiv 0 \iff A \cap B = \varnothing$
$\iff$ $-a_1a_2 = -a_3a_4$ und $(a_1, a_2) = -(-a_3, -a_4)$ (nach Lemma)
$\iff$ $d(f) = a_1a_2a_3a_4 = (a_1a_2)^2 = 1$ und
$\epsilon(f) = (a_1, a_2)(a_2, a_3)(a_3, a_4)(a_1, a_3)(a_1, a_4)(a_2, a_4)$
$= (a_1, a_2)(a_3, a_4)(a_1a_2, a_3a_4)$
$= (a_1, a_2)(a_3, a_4)(-1, a_3a_4)$
$= (a_1, a_2)(-a_3, -a_4)(-1, -1)$
$= -(-a_3, -a_4)(-a_3, -a_4)(-1, -1) = -(-1, -1)$

4. $\underline{n \geq 5}$ Es genügt den Fall $\underline{n = 5}$ zu betrachten:
(nach Lemma Teil b)) Rang$(f) \geq 2$ $\Rightarrow$ f repräsentiert 2^{r-1} Elemente von K^*/K^{*2}
$2^{r-1} \geq 2$ $\Rightarrow$ es ex. $a \in K^*/K^{*2} : a \neq d$ und $f \equiv a$
Sei nun h quadratische Form und Rang$(h) = 5$:
$\iff$ $h \sim ax^2 + g$ mit Rang$(g) = 4$ und $a \neq d(h)$
Es gilt: $d(h) = ad(g) = d$
$\iff$ $d(g) = \frac{d}{a} \neq 1$, (da $a \neq d$)
$\iff$ $g \equiv 0$ (nach $\underline{n = 4}$)
$\iff$ $h \sim ax^2 \iff h \equiv 0$

Bemerkung:

1. $f \equiv a \neq 0$
   $\Rightarrow$ f repräsentiert
   a) 1 Element von K^*/K^{*2}, falls $n = 1$
   b) 2^{r-1} Elemente von K^*/K^{*2}, falls $n = 2$
   c) $2^r - 1$ Elemente von K^*/K^{*2}, falls $n = 3$
   d) 2^r Elemente von K^*/K^{*2}, falls $n \geq 4$

   Beweis:

   $\underline{n = 1}$: $f \sim ax^2 \Rightarrow f \equiv a = d \in K^*/K^{*2}$
   $\underline{n = 2}$: $f \equiv 0 \iff d = -1 \iff a_1a_2 = -1$

$\iff \quad a_1 = -a_2 \quad \iff \quad \epsilon(f) = (a_1, a_2) = (a_1, -a_1) = (a_1, 1) = 1$
$\Rightarrow \quad H_a^{-1} = \{x \in K^*/K^{*2}; f \equiv x\}$
$\sharp H_a^{-1} = 2^{r-1} \quad \Rightarrow \quad f$ nimmt 2^{r-1} Werte an.
$\underline{n=3}$: $\quad f \equiv a \quad \iff \quad a \neq -d$
$\Rightarrow \quad f$ repräsentiert nicht $-d$
$\Rightarrow \quad \sharp \, \{f$ repräsentiert $a\} = 2^r - 1$
$\underline{n \geq 4}$: $\quad$ (Korollar $n \geq 4$)

2. Wir wissen, dass alle quadratischen Formen in 5 Variablen über $\mathbb{Q}_p$ die 0 repräsentieren. In dieser Beziehung erwähnen wir eine Vermutung von E. Artin: alle homogenen Polynome vom Grad d über $\mathbb{Q}_p$ in mindestens d^2+1 Variablen haben eine nicht-triviale Nullstelle. Der Fall $n = 3$ wurde positiv gelöst (z. B. T.Springer, Koninkl. Nederl. Akad. van Wetenss., 1955, pp. $512 - 516$). Der allgemeine Fall blieb für 30 Jahre ungelöst. *Artins Vermutung* wurde schon 1966 von G. Terjanian widerlegt: es existiert ein homogenes Polynom vom Grad 4 über $\mathbb{Q}_2$ in 18 Variablen, das keine nicht-trivialen Nullstellen hat. Terjanian beginnt mit dem Polynom

$$n(X,Y,Z) = X^2YZ + Y^2ZX + Z^2XY + X^2Y^2 + Y^2Z^2 + Z^2X^2 - X^4 - Y^4 - Z^4$$

welches die Eigenschaft hat, dass $n(x,y,z) \equiv -1 \bmod 4$, falls (x,y,z) primitiv ist in Z_3. Es sei

$$f(X_1, \cdots, X_9) = n(X_1, X_2, X_3) + n(X_4, X_5, X_6) + n(X_7, X_8, X_9).$$

Es ist $f(x_1, \cdots, x_9) \not\equiv 0 \bmod 4$, falls $(x_1, \cdots, x_9)$ primitiv ist. Davon leitet man leicht ab, dass das Polynom

$$F(X_1, \cdots, X_18) = f(X_1, \cdots, X_9) + 4f(X_{10}, \cdots, X_{18})$$

keine nicht-triviale Nullstelle hat. (Es existieren analoge Beispiele, aber nur für höhere Grade, für alle $\mathbb{Q}_p$.)
Man weiß dennoch, dass *Artins Vermutung* „fast“ wahr ist: für einen festen Grad d , gilt sie für alle Primzahlen p bis auf endlich viele (Ax. Kochen, Amer. J. of Math., 1965). Trotzdem ist nicht bekannt, selbst für $n = 4$, wie man die Menge dieser „Ausnahme-Primzahlen“ bestimmt.

1.3 Klassifikation

1.3.1 Theorem 7

f, g quadratische Formen über K;
$f \sim g \quad \iff$
$Rang(f) = Rang(g)$, $d(f) = d(g)$, $\epsilon(f) = \epsilon(g)$

Beweis:

1. “$\Rightarrow$„ klar nach Definition von Äquivalenz
2. “$\Leftarrow$„ Induktion nach $Rang(f) = Rang(g)$
   a) $\underline{n=0}$: trivial (da $f = 0 = g$ einzige quadr. Form vom Rang 0 ist)
   b) $\underline{n=1}$: $f \sim d(f)x^2$, $g \sim d(g)y^2$ mit $d(f) = d(g)$ und $\epsilon(f) := 1 =: \epsilon(g)$ (da leeres Produkt) $\Longleftrightarrow f \sim g$
   c) $\underline{n>1}$: Induktionsannahme: Aussage gilt für $n-1$
   $Rang(f) = Rang(g)$, $d(f) = d(g)$, $\epsilon(f) = \epsilon(g)$
   (Theorem 6) $\Rightarrow$ f, g repräsentieren die selben Elemente von K^*/K^{*2}
   $\Longleftrightarrow$ es ex. $a \in K^*$ mit $f \equiv a$ und $g \equiv a$
   $\Longleftrightarrow$ $f \sim az^2 + f^{'}$ und $g \sim az^2 + g^{'}$, wobei die Formen $f^{'}$, $g^{'}$ vom Rang $n-1$ sind.
   $\Longleftrightarrow$ $d(f) = ad(f^{'})$, $d(g) = ad(g^{'})$ und $d(f^{'}) = d(g^{'})$ (nach Induktionsvorraussetzung), $\epsilon(f) = (a, d(f))\epsilon(f^{'})$ und $\epsilon(g) = (a, d(g))\epsilon(g^{'})$
   $\Longleftrightarrow$ $d(f) = d(g)$ und $\epsilon(f) = \epsilon(g)$(da $\epsilon(f^{'}) = \frac{\epsilon(f)}{(a,d(f^{'}))} = \frac{\epsilon(g)}{(a,d(g^{'}))} = \epsilon(g^{'})$)
   nach Ind.ann. ist $f^{'} \sim g^{'}$
   $\Longleftrightarrow$ $f \sim g$

1.3.2 Korollar

Bis auf Äquivalenz existiert genau eine quadratische Form vom Rang 4, die nicht 0 repräsentiert.
Seien $a, b \in \mathbb{Q}_p$ mit $(a, b) = -1$, dann ist das genau die Form $f \sim z^2 - ax^2 - by^2 + abt^2$

Beweis:

(nach Theorem 6) $Rang(f) = 4$, $f \not\equiv 0$ $\Longleftrightarrow$ $d(f) = 1$ und $\epsilon(f) = -(-1, -1)$
$d(f) = 1(-a)(-b)ab = a^2b^2 = 1$
$\epsilon(f) = (1, -a)(1, -b)(1, ab)(-a, -b)(-a, ab)(-b, ab)$
$= \underbrace{\underbrace{(1, a)(1, b)}_{(1,ab)}(1, ab)}_{1}(-a, -b)(ab, ab)$
$= (-a, -b)(ab, ab)$
$= (-1, -b)(a, -b)(ab, ab)$
$= (-1, -1)(-1, b)\underbrace{(a, -1)}_{(-1,a)}(a, b)(ab, ab)$

$$= \underbrace{\underbrace{(-1,ab)}_{(ab,ab)}(ab,ab)}_{1}(-1,-1)\underbrace{(a,b)}_{-1}$$
$$= -(-1,-1)$$

1.3.3 Proposition 6

Sei $n \geq 1$, $d \in K^*/K^{*2}$ und $\epsilon = \pm 1$.
Es existiert eine quadratische Form f vom Rang n mit $d(f) = d$, $\epsilon(f) = \epsilon$
$\Longleftrightarrow$

1. $\underline{n = 1}$: $\quad \epsilon = 1$
2. $\underline{n = 2}$: $\quad d \neq -1$ oder $\epsilon = 1$
3. $\underline{n \geq 3}$

Beweis:

1. $\underline{n = 1}$ trivial ($\epsilon(f) = 1$ und $d(f) = d$ für $f \sim dx^2$)
2. $\underline{n = 2}$ $\quad f \sim a_1{x_1}^2 + a_2{x_2}^2$

   a) „$\Rightarrow$“: Annahme: $d(f) = -1$
   $\Rightarrow \quad \epsilon(f) = (a_1, a_2) = (a_1, -\underbrace{a_1a_2}_{-1}) = 1$
   Also kann nicht gleichzeitig $d(f) = -1$ und $\epsilon(f) = -1$ sein.

   b) „$\Leftarrow$“:
      i. Für $d = -1$ und $\epsilon = 1$ hat $f \sim a{x_1}^2 + ad{x_2}^2$ diese Invarianten.
      ii. Ist $d \neq -1$ ex. $a \in {\mathbb{Q}_p}^*$ mit $(a, -d) = \epsilon$ (nach Theorem 6 Korollar) und $f \sim a{x_1}^2 + ad{x_2}^2$ leistet das gewünschte.
3. $\underline{n = 3}$ Es sei $-d \neq a \in K^*/K^{*2}$. Es existiert eine quadratische Form g vom Rang 2 mit $d(g) = ad$, $\epsilon(g) = \epsilon(a, -d)$.
   Sei $f \sim az^2 + g$:
   $d(f) = ad(g) = a^2d = d$
   $\epsilon(f) = (a, d(g))\epsilon(g) = (a, ad)\epsilon(a, -d)$
   $= (a, -d)(a, -d)\epsilon = \epsilon$
4. $\underline{n \geq 3}$ Es exisiert g quadratische Form vom Rang 3 mit vorgegebenen Invarianten.
   Wir setzen $f \sim g(x_1, x_2, x_3) + {x_4}^2 + \cdots + {x_n}^2$
   $d(f) = d(g) = d$ und $\epsilon(f) = \epsilon(g)(\text{Terme mit } \underbrace{(x,1)}_{1}) = \epsilon$

1.3.4 Korollar

Die Anzahl der Äquivalenzklassen quadratischer Formen über $\mathbb{Q}_p$ ist:

1. $\underline{n=1}$:
   a) $\underline{p \neq 2}$: 4
   b) $\underline{p = 2}$: 8
2. $\underline{n=2}$
   a) $\underline{p \neq 2}$: 7
   b) $\underline{p = 2}$: 15
3. $\underline{n \geq 3}$
   a) $\underline{p \neq 2}$: 8
   b) $\underline{p = 2}$: 16

Beweis:

$\sharp K^*/K^{*2} = \underbrace{4}_{p\neq 2}$ bzw. $\underbrace{8}_{p=2}$ daher ist
$\sharp\{d(f)\} = \underbrace{4}_{p\neq 2}$ bzw. $\underbrace{8}_{p=2}$
$\sharp\{\epsilon(f)\} = 2$
(nach Proposition 6) $\Rightarrow$

1. $\underline{n=1}$
   a) $\underline{p \neq 2}$ $\Rightarrow$ $\sharp([f]) = 4 \cdot 1$
   b) $\underline{p = 2}$ $\Rightarrow$ $\sharp([f]) = 8 \cdot 1$
2. $\underline{n=2}$
   a) $\underline{p \neq 2}$ $\Rightarrow$ $\sharp([f]) = 1 \cdot 4 + 1 \cdot 3 = 7$
   b) $\underline{p = 2}$ $\Rightarrow$ $\sharp([f]) = 1 \cdot 8 + 1 \cdot 7 = 15$
   (da für $\epsilon = -1$ gilt: $d \neq -1$, also nimmt f einen Wert weniger an)
3. $\underline{n \geq 3}$
   a) $\underline{p \neq 2}$ $\Rightarrow$ $\sharp([f]) = 2 \cdot 4 = 8$
   b) $\underline{p = 2}$ $\Rightarrow$ $\sharp([f]) = 2 \cdot 8 = 16$

1.4 Der reelle Fall

f quadratische Form, $Rang(f) = n$, $K = \mathbb{R}$
$\Rightarrow$ (Spektralsatz) $f \sim {x_1}^2 + \cdots + {x_r}^2 - {y_1}^2 - \ldots - {y_s}^2$ mit $r, s \in \mathbb{N}$ und $r+s = n$.
$(r,s) (\in \mathbb{N}^2)$ hängt nur von f ab.
<u>Definition</u>:

1. (r, s) heißt Signatur von f.

2. f heißt definit $:\Longleftrightarrow$ $r = 0$ oder $s = 0$, andernfalls heißt f indefinit. (indefinit $\Rightarrow$ $f \equiv 0$)

3. $\epsilon(f)$ ist definiert wie in $\mathbb{Q}_p$.

Es ist klar, dass gilt $(-1, -1) = -1$ (da $z^2 + x^2 + y^2 = 0$ keine nicht-triviale Lösung in $\mathbb{R}$ hat).
$\Rightarrow$

$$\epsilon(f) = \prod_{i<j} (a_i, a_j)$$

$$= \underbrace{(1,1)\dots(1,1)}_{1}\underbrace{(1,-1)\dots(1,-1)}_{1}(-1,-1)\dots(-1,-1)$$

$$= \underbrace{(-1,-1)\dots(-1,-1)}_{(s-1)-mal}\underbrace{(-1,-1)\dots(-1,-1)}_{(s-2)-mal}\dots\underbrace{(-1,-1)}_{1-mal}$$

$$= (-1)^{\sum_{k=1}^{s-1} k} = (-1)^{\frac{s(s-1)}{2}}$$

1. $s \equiv 0, 1 \bmod 4$ $\Rightarrow$ $\frac{s^2-s}{2} \equiv 0 \bmod 4$

2. $s \equiv 2 \bmod 4$ $\Rightarrow$ $\frac{s^2-s}{2} \equiv 1 \bmod 4$

3. $s \equiv 3 \bmod 4$ $\Rightarrow$ $\frac{s^2-s}{2} \equiv 3 \bmod 4$

$\Rightarrow$ $\epsilon(f) = 1$, falls $s \equiv 0, 1 \bmod 4$ und $\epsilon(f) = 1$, falls $s \equiv 2, 3 \bmod 4$
$\Rightarrow$ $d(f) = 1$, falls s$\equiv 0 \bmod 2$ und $d(f) = 1$, falls $s \equiv 1 \bmod 2$
$\Rightarrow$ d, ϵ bestimmen s modulo 4
$\Rightarrow$ d, ϵ bestimmen f bis auf Äquivalenz für $n \leq 3$.
Für $K = \mathbb{R}$ gilt $n = 1 - 3$ von Theorem 6 und seinem Korollar (da im Beweis nur benutzt wird, dass das Hilbertsymbols nicht ausgeartet ist). $n = 4$ gilt nicht.