Funktionenkörper

Quadratische Formen über rationalen Zahlen
Sommersemester 2007 - Universität Heidelberg

Gesa Becker - 2339190
Antje Gruber - 2369039

19. Juli 2007

1 Voraussetzungen

1.1 Definition

Ein Kï¿½rper K heiï¿½t Funktionenkï¿½rper in j Variablen ï¿½ber einem Kï¿½rper von Konstanten k, wenn eine der beiden folgenden ï¿½quivalenten Bedingungen erfï¿½llt ist:

1. K ist eine endliche Erweiterung eines Kï¿½rpers von rationalen Funktionen in j unabhï¿½ngigen Variablen ï¿½ber k.
2. K hat Transzendenzgrad j ï¿½ber k und ist endlich erzeugt ï¿½ber k. Man erhï¿½lt K also beispielsweise, indem man zu k endlich viele Elemente hinzufï¿½gt.

Wir werden in diesem Vortrag das *Theorem von Tsen* verallgemeinern und zeigen, dass fï¿½r den Fall, dass k ein C_i-Kï¿½rper ist, folgt, dass K ein C_{i+j}-Kï¿½rper ist. Zunï¿½chst aber einige Vorï¿½berlegungen:

1.2 Definition

Sei Φ eine Form vom Grad d in n Variablen mit Koeffizienten in einem Kï¿½rper K. Hat Φ nur eine triviale Nullstelle in K und ist $n = d^i$, dann heiï¿½t Φ **Kï¿½rpernorm der Ordnung** i. Ist $i = 1$, so heiï¿½t Φ einfach **Kï¿½rpernorm**.

2 Kï¿½rpernormen

2.1 Lemma

Angenommen, K hat eine endliche Erweiterung E vom Grad $e > 1$. Dann ist die Norm von E nach K eine Kï¿½rpernorm vom Grad e.

Beweis Die Norm $N(x)$ mit $x \in E$ ist definiert als die Determinante der Lineartransformation, bei der mit x multipliziert wird. Sobald eine Basis fï¿½r E als Vektorraum ï¿½ber K gewï¿½hlt worden ist, wird $N(x)$ zu einem homogenen Polynom vom Grad e in den e Koordinaten von x. Da $N(x) \neq 0$ nur fï¿½r $x \neq 0$, ist dies eine Kï¿½rpernorm.
Dieses Lemma zeigt, dass die Ungleichung $n > d$ in *Chevalley's Theorem* nicht verbessert werden kann. Fï¿½r gegebenes d hat ein endlicher Kï¿½rper eine Erweiterung vom Grad d, folglich also eine Kï¿½rpernorm vom Grad d.
Fï¿½r spï¿½tere technische Zwecke brauchen wir ein weiteres Lemma:

2.2 Lemma

Ist K nicht algebraisch abgeschlossen, dann erlaubt K Kï¿½rpernormen beliebig groï¿½en Grades.
Dieses Lemma ist kein direktes Korollar aus dem vorhergehenden, denn K muss nicht unbedingt Erweiterungen beliebig groï¿½en Grades erlauben.
Ist K beispielsweise der Kï¿½rper der reellen Zahlen, so hat er nur eine Erweiterung vom Grad 2. Trotzdem ist das Lemma offensichtlich richtig fï¿½r die reellen Zahlen.
Auï¿½erdem besagt das Theorem von *Artin-Schreier*, dass Kï¿½rper wie die reellen Zahlen die einzigen sind, deren algebraischer Abschluss eine endliche Erweiterung ist.
Hier nun ein einfacher Beweis, der die Nutzung von *Artin-Schreier* vermeidet:

Beweis Sei ϕ Kï¿½rpernorm vom Grad e. Seien

$$\phi^{(1)} = \phi(\phi|\phi|...|\phi)$$
$$\phi^{(2)} = \phi^{(1)}(\phi|\phi|...|\phi)$$

usw., so dass wir jede Variable durch die Form ϕ selbst ersetzen und die "|" bedeuten, dass bei jedem neuen Auftreten von ϕ neue Variablen eingefï¿½hrt werden. Dann ist $\phi^{(m)}$ offensichtlich Kï¿½rpernorm vom Grad e^{m+1}.

3 Lï¿½sungen homogener Gleichungen

Wir brauchen nun noch eine Aussage ï¿½ber homogene Gleichungssysteme. Zuerst wiederholen wir ein klassisches Theorem:

3.1 Theorem

Angenommen K sei algebraisch abgeschlossen. Seien $f_1, \ldots, f_r$ Formen in n Variablen ï¿½ber K. Falls $n > r$ ist, haben diese eine gemeinsame nicht-triviale Nullstelle in K.

Beweis Man kï¿½nnte das Theorem durch *stures* Ausrechnen beweisen. Aber es gibt auch einen schï¿½nen geometrischen Weg dies zu sehen. Die Nullstellenmenge jeder Form f_j ist so beschaffen, dass sie im projektiven $(n-1)$-Raum ï¿½ber K eine Hyperebene H_j bildet, d.h. eine projektive Mannigfaltigkeit der Dimension $n-2$. Die r Hyperebenen schneiden sich im projektiven Raum, so dass $H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_r$ nicht leer ist. Nach der Theorie im projektiven Raum hat diese Schnittmenge eine Dimension $\geq n-1-r$.

Nun verallgemeinern wir diese Aussage fï¿½r C_i-Kï¿½rper.

3.2 Theorem

Sei K ein C_i-Kï¿½rper. Seien $f_1, \dots, f_r$ Formen in n Variablen ï¿½ber K vom Grad d. Falls $n > r \cdot d^{i\cdot}$ ist, dann haben sie eine gemeinsame nicht-triviale Nullstelle in K.

Beweis Man kann annehmen, dass K nicht algebraisch abgeschlossen ist. Sonst greift Theorem 3.1.
Da $n > rd^i > d^i$ gilt, hat jede Form $f_1, \dots, f_r$ eine nicht-triviale Nullstelle in K. Zu zeigen ist, dass sie eine *gemeinsame* Nullstelle in K haben. Sei ϕ eine Kï¿½rpernorm vom Grad $e \geq r$. Also eine Form in $n = e$ Variablen von Grad e, deren einzige Nullstelle in K trivial ist.
Betrachte die Folge von Formen

$$\begin{aligned} \phi^{(1)} &= \phi^{(1)}(f) = \phi\left(f_1, \dots, f_r \,|f_1, \dots, f_r| \dots |f_1, \dots, f_r|\, 0, \dots, 0\right) \\ \phi^{(2)} &= \phi^{(2)}(f) = \phi^{(1)}\left(f_1, \dots, f_r \,|f_1, \dots, f_r| \dots |f_1, \dots, f_r|\, 0, \dots, 0\right) \end{aligned}$$

Dabei setzt man die Folge $f_1, \dots, f_r$ so oft ein, wie sie in die Form ϕ „passen“ die restlichen Variablen von ϕ fï¿½llt man mit 0 auf. Fï¿½r einen *Satz* von Formen $f_1, \dots, f_r$ benutzt man dieselben Variablen $x_{i1}, \dots, x_{in}$. Bei jedem Einsetzen eines neuen Satzes verwendet man neue Variablen in den Formen, so dass man $\phi^{(1)}(f)$ so schreiben kann:

$$\phi\left(f_1\left(x_{11}, \dots, x_{1n}\right), \dots, f_r\left(x_{11}, \dots, x_{1n}\right), f_1\left(x_{21}, \dots, x_{2n}\right), \dots, f_r\left(x_{21}, \dots, x_{2n}\right), \dots, 0, \dots, 0\right)$$

Die Folge $f_1, \dots, f_r$ passt $\left[\frac{e}{r}\right]$-mal in ϕ, da ϕ e Variablen hat. Jedes f_j hat n Variablen. Deshalb hat $\phi^{(1)}$ hat $n\left[\frac{e}{r}\right]$ Variablen.
Die $f_1, \dots, f_r$ haben jeweils Grad d. Deshalb hat $\phi^{(1)}$ den Grad de. Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{e}{r} &< \left[\frac{e}{r}\right] + 1 && (1) \\ \Leftrightarrow e &< r\left(\left[\frac{e}{r}\right] + 1\right) && (2) \\ \Leftrightarrow de &< dr\left(\left[\frac{e}{r}\right] + 1\right) && (3) \end{aligned}$$

Falls K ein C_1-Kï¿½rper ist, wollen wir, dass $n\left[\frac{e}{r}\right] > de$, was durch $n\left[\frac{e}{r}\right] > dr \cdot \left(\left[\frac{e}{r}\right] + 1\right) \Leftrightarrow (n - dr)\left[\frac{e}{r}\right] > dr$ impliziert wird.
Da $n - dr > 0$ ist, kann man dies dadurch erreichen, dass man e groï¿½ wï¿½hlt. Dann hat $\phi^{(1)}$ eine nicht-triviale Nullstelle. Deshalb gibt es eine gemeinsame Nullstelle aller f_j, da ϕ eine Kï¿½rpernorm ist, also nur eine triviale Nullstelle hat.

Falls K ein C_i-Kï¿½rper ist (mit $i > 1$), mï¿½ssen wir hï¿½here $\phi^{(m)}$ betrachten.
Man ï¿½berlegt sich leicht, dass $\phi^{(m)}$ den Grad $D_m = d^m e$ hat und dass $\left(D_{m+1}\right)^i = \left(d \cdot d^m e\right)^i = d^i\left(D_m\right)^i$ gilt. Wenn N_m die Anzahl der Variablen von $\phi^{(m)}$ bezeichnet, kï¿½nnen die $f_1, \dots, f_r$ $\left[\frac{N_m}{r}\right]$-mal in $\phi^{(m+1)}$ eingesetzt werden. Da jedes f_j n Variablen hat, gilt:

$$N_{m+1} = n\left[\frac{N_m}{r}\right]$$

Wir wollen m so groï¿½ wï¿½hlen, dass $N_m > \left(D_m\right)^i$. Denn dann hat die Form $\phi^{(m)}$ in dem C_i-Kï¿½rper K eine nicht-triviale Nullstelle, die $f_1, \dots, f_r$ also eine gemeinsame, nicht-triviale Null in K.

Wir werden zeigen, dass $\frac{N_m}{(D_m)^i} \to \infty$ fï¿½r $m \to \infty$, was die Ungleichung impliziert, da N_m, D_m positive natï¿½rliche Zahlen sind. Von jetzt an setze $\left[\frac{N_m}{r}\right] = \frac{N_m}{r} - \frac{t_m}{r}$, wobei $0 \leq t_m < r$.
Deshalb gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{N_{m+1}}{(D_{m+1})^i} &= \frac{n \cdot \left[\frac{N_m}{r}\right]}{d^i\,(D_m)^i} = \frac{n \cdot \frac{1}{r}(N_m - t_m)}{d^i (D_m)^i} && (4)\\
&= \frac{n}{rd^i}\frac{N_m}{(D_m)^i} - \frac{n}{rd^i}\frac{t_m}{e^i\,(d^i)^m} && (5)\\
&\geq \frac{n}{rd^i}\frac{N_m}{(D_m)^i} - \frac{n}{rd^i}\frac{r}{e^i\,(d^i)^m} && (6)
\end{aligned}$$

Benutzt man dieselbe Ungleichung fï¿½r $m, m-1, \ldots, 2$, erhï¿½lt man:

$$\begin{aligned}
\frac{N_{m+1}}{(D_{m+1})^i} &\geq \frac{n}{rd^i}\frac{N_m}{(D_m)^i} - \frac{n}{rd^i}\frac{r}{e^i\,(d^i)^m} && (7)\\
\frac{N_m}{(D_m)^i} &\geq \frac{n}{rd^i}\frac{N_{m-1}}{(D_{m-1})^i} - \frac{n}{rd^i}\frac{r}{e^i\,(d^i)^{m-1}} && (8)\\
\vdots \quad & \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots
\end{aligned}$$

Setzt man nun (8) in (7) ein, ergibt dies:

$$\begin{aligned}
\frac{N_{m+1}}{(D_{m+1})^i} &\geq \frac{n}{rd^i}\left(\frac{n}{rd^i}\frac{N_{m-1}}{(D_{m-1})^i} - \frac{n}{rd^i}\frac{r}{e^i\,(d^i)^{m-1}}\right) - \frac{n}{rd^i}\frac{r}{e^i\,(d^i)^m} && (9)\\
&= \left(\frac{n}{rd^i}\right)^2\left(\frac{N_{m-1}}{(D_{m-1})^i}\right) - \left(\frac{n}{rd^i}\right)^2\left(\frac{r}{e^i(d^i)^{m-1}}\right) - \left(\frac{n}{rd^i}\right)\left(\frac{r}{e^i(d^i)^m}\right) && (10)\\
&= \left(\frac{n}{rd^i}\right)^2\left(\frac{N_{m-1}}{(D_{m-1})^i}\right) - \frac{n}{r}\frac{n}{r}\frac{r}{e^i}\frac{1}{(d^i)^2(d^i)^{m-1}} - \frac{n}{r}\frac{r}{e^i}\frac{1}{d^i(d^i)^m} && (11)\\
&= \left(\frac{n}{rd^i}\right)^2\left(\frac{N_{m-1}}{(D_{m-1})^i}\right) - \left(\frac{r}{e^i}\frac{n}{r}\frac{1}{(d^i)^{m+1}}\right)\left[\frac{n}{r} + 1\right] && (12)\\
\vdots \quad & \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
&\geq \left(\frac{n}{rd^i}\right)^m\left(\frac{N_1}{(D_1)^i}\right) - \left(\frac{r}{e^i}\frac{n}{r}\frac{1}{(d^i)^{m+1}}\right)\left[\left(\frac{n}{r}\right)^{m-1} + \left(\frac{n}{r}\right)^{m-2} + \ldots + 1\right] && (13)\\
&\geq \left(\frac{n}{rd^i}\right)^m\left(\frac{N_1}{(D_1)^i}\right) - \left(\frac{r}{e^i}\frac{n}{r}\frac{1}{(d^i)^{m+1}}\right)\frac{\left(\frac{n}{r}\right)^m - 1}{\left(\frac{n}{r}\right) - 1} && (14)
\end{aligned}$$

Ersetzt man nun $D = de, N_1 = n\left[\frac{e}{r}\right], \left[\frac{e}{r}\right] = \frac{e}{r} - \frac{t}{r}$mit $0 \leq t < r$,

$$\frac{N_{m+1}}{\left(D_{m+1}\right)^i} \geq \left(\frac{n}{rd^i}\right)^m \left(\frac{n\left(\frac{e}{r} - \frac{t}{r}\right)}{(de)^i}\right) - \left(\frac{r}{e^i}\frac{n}{r}\frac{1}{(d^i)^{m+1}}\right)\frac{\frac{n^m - r^m}{r^m}}{\frac{n-r}{r}} \tag{15}$$

$$= \left(\frac{n}{rd^i}\right)^{m+1}\frac{e-t}{e^i} - \left(\frac{r}{e^i}\frac{n}{r}\frac{1}{d^i(d^i)^m}\right)\frac{r\left(n^m - r^m\right)}{(n-r)\,r^m} \tag{16}$$

$$= \left(\frac{n}{rd^i}\right)^{m+1}\frac{e-t}{e^i} - \frac{r}{e^i}\frac{n}{rd^i}\frac{r}{n-r}\left(\left(\frac{n}{rd^i}\right)^m - \frac{1}{(d^i)^m}\right) \tag{17}$$

$$= \left(\frac{n}{rd^i}\right)^{m+1}\left(\frac{e-t}{e^i} - \frac{r^2}{e^i(n-r)}\right) + \frac{1}{(d^i)^m}\left(\frac{rn}{e^i d^i(n-r)}\right) \tag{18}$$

$$= \left(\frac{n}{rd^i}\right)^{m+1}\left(\frac{(n-r)(e-t) - r^2}{e^i(n-r)}\right) + \frac{1}{(d^i)^m}\left(\frac{rn}{e^i d^i(n-r)}\right) \tag{19}$$

Weil man e so groï¿½ wï¿½hlen kann, dass $(n-r)(e-t) - r^2 > 0$ und $\left(\frac{n}{rd^i}\right) > 1$, geht der erste Summand gegen ∞ fï¿½r $m \to \infty$. Der zweite Summand geht dann gegen 0 da $d > 1$ ist. Deshalb geht $\frac{N_{m+1}}{\left(D_{m+1}\right)^i} \to \infty$ fï¿½r $m \to \infty$.

4 Verallgemeinerung des Theorems von Tsen

4.1 Theorem

Ist der Kï¿½rper K ein C_i-Kï¿½rper, so ist auch jede algebraische Erweiterung von K ein C_i-Kï¿½rper.

Beweis Es reicht, das Theorem fï¿½r eine endliche Erweiterung E von K zu beweisen, da die Koeffizienten jeder gegebenen Form in endlicher Erweiterung vorkommen.
Sei $f(X_1, ..., X_n)$ eine Form in E mit $n > d^i$. Sei $\omega_1, ..., \omega_e$ eine Basis von E als Vektorraum ï¿½ber K. Wir fï¿½hren neue Variablen $\bar{X}_{\nu\mu}$ ein mit

$$X_\nu = \bar{X}_{\nu 1}\omega_1 + \bar{X}_{\nu 2}\omega_2 + ... + \bar{X}_{\nu e}\omega_e \tag{20}$$

mit $\nu = 1, ..., n$.
Dann ist $f(X) = f_1(\bar{X})\omega_1 + ... + f_e(\bar{X})\omega_e$, so dass $f_1, ..., f_e$ Formen vom Grad d in $e \cdot n$ Variablen sind mit Koeffizienten in K.
Eine Nullstelle von f in E zu finden ist ï¿½quivalent damit, eine gemeinsame Nullstelle von $f_1, ..., f_e$ in K zu finden. Dies ist durch das vorhergehende Theorem mï¿½glich, da $en > ed^i$.

4.2 Theorem

Ist der Kï¿½rper K ein C_i-Kï¿½rper und ist E eine Erweiterung von K mit Transzendenzgrad j, so ist E ein C_{i+j}-Kï¿½rper.

Beweis E ist eine algebraische Erweiterung einer rein transzendenten Erweiterung von K. Mit dem vorhergehenden Theorem und Induktion nach j kï¿½nnen wir uns auf den Fall $E = K(T)$ beschrï¿½nken. Aufgrund der Homogeneitï¿½t reicht es, Formen mit Koeffizienten aus dem Polynomring $K[T]$ zu beachten.

Angenommen, $f(X_1, ..., X_n)$ hat $n > d^{i+1}$ Variablen und Koeffizienten in $K[T]$. Wir fï¿½hren neue Variablen $\bar{X}_{\nu\mu}$ ein mit

$$X_\nu = \bar{X}_{\nu 0} + \bar{X}_{\nu 1}T + \bar{X}_{\nu 2}T^2 + ... + \bar{X}_{\nu s}T^s \tag{21}$$

mit $\nu = 1, ..., n$, wobei s spï¿½ter genauer bestimmt wird.
Ist r der hï¿½chste Grad der Koeffizienten von f, so bekommen wir

$$f(X) = f_0(\bar{X}) + f_1(\bar{X})T + ... + f_{ds+r}(\bar{X})T^{ds+r} \tag{22}$$

wobei jedes f_μ eine Form vom Grad d in $n(s+1)$ Variablen ist.
Wir kï¿½nnen das obige Theorem auf diese Formen mit Koeffizienten in K anwenden, vorausgesetzt, dass

$$n(s+1) > d^i(ds + r + 1) \tag{23}$$

oder

$$(n - d^{i+1})s > d^i(r+1) - n \tag{24}$$

gilt.
Dies kann erreicht werden, indem wir s groï¿½ genug wï¿½hlen. Die gemeinsame nicht-triviale Nullstelle der f_μ in K ergibt eine nicht-triviale Nullstelle von f in $K[T]$.