Übungen zur Algebraischen Zahlentheorie I

- 9. Blatt -

Prof. Dr. K. Wingberg WS 2009/2010
J. Bartels abzugeben bis Donnerstag, den 17. Dezember 2009 um 9:15 Uhr
. in den Kästen neben dem Seifertraum

http://www.mathi.uni-heidelberg.de/∼bartels/Vorlesung

Name:	/name/	Matrikelnummer:	/nr/
Übungsleiter:	/uebleiter/		
2. Name:	/namezwei/	2. Matrikelnummer:	/nrzwei/

Man achte auf eine saubere Darstellung und eine ordentliche Schrift.
Bitte keine maschinell erstellten Lösungen abgeben.

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
Punkte					

---

1 . Aufgabe (6 Punkte):
Es sei $K/\mathbb{Q}$ ein Galoisscher Zahlkörper. Zu jedem Primideal $\mathfrak{p}|p$ ungleich 0 aus $\mathcal{O}_K$ gehört lt. Vorlesung eine Erweiterung endlicher Körper $\kappa(\mathfrak{p})/\kappa(p)$ mit Galoisgruppe $Gal(\kappa(\mathfrak{p})/\kappa(p))$, welche epimorphes Bild der Zerlegungsgruppe ist (Satz 8.7) - $\pi : G_{\mathfrak{p}} \to Gal(\kappa(\mathfrak{p})/\kappa(p))$. Aus der Algebra 1 wissen wir, daß diese Gruppe im Frobenius ein ausgezeichnetes Element hat. Geben Sie diese Abbildung π im Fall $K = \mathbb{Q}(\sqrt{11})$ explizit an. Für welche Primideale $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_K$ ist dieser Homomorphismus ein Isomorphismus? Geben Sie für diese das eindeutig bestimmte Urbild des Frobeniusautomorphismus an, d.h. bestimmen Sie dies in Abhängigkeit des Primideals $\mathfrak{p}$.

2 . Aufgabe (6 Punkte):
Es sei $K/\mathbb{Q}$ ein Galoisscher Zahlkörper. Lt. 2. Aufgabe des vorangegangenen Blatts definiert ein Primideal $\mathfrak{p} \neq (0)$ eine nicht-archimedische Bewertung auf K, welche die $p-$Bewertung $(\mathfrak{p}|p)$ auf $\mathbb{Q}$ fortsetzt. Zeigen Sie, daß die Vervollständigung von K bezüglich $\mathfrak{p}$ eine Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$ liefert, deren Galoisgruppe mit der Zerlegungsgruppe $G_{\mathfrak{p}}$ übereinstimmt.

3 . Aufgabe (6 Punkte):
Überprüfen Sie $Spek(\mathbb{Z})$ auf die folgenden Eigenschaften:
Hausdorffsch, zusammenhängend, (überdeckungs-)kompakt, quasikompakt. Wenn Ihnen diese Begriffe fehlen, besorgen Sie sich ein Topologiebuch und notieren Sie deren Definition mit Referenz auf dem Übungsblatt.

4 . Aufgabe (6 Punkte):
Es sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{7})$ gegeben.

a) Zeigen Sie, daß die Einbettung $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathcal{O}_K$ einen surjektiven Morphismus affiner Schemata $f : Spek(O_K) \rightarrow Spek(\mathbb{Z})$ liefert.

b) Es sei $\mathfrak{p} \in Spek(\mathbb{Z})$ gegeben. Was ist die Faser $f^{-1}(\mathfrak{p})$ dieses Punkts? Welche Möglichkeiten gibt es?

Nota bene: $Spek(A)$ ist ein Synonym für $Spec(A)$.