# Übungen zur Algebraischen Zahlentheorie I
- 8. Blatt -

Prof. Dr. K. Wingberg
J. Bartels

WS 2009/2010
abzugeben bis Donnerstag, den 10. Dezember 2009 um 9:15 Uhr
in den Kästen neben dem Seifertraum

http://www.mathi.uni-heidelberg.de/∼bartels/Vorlesung

---

| | | | |
|---|---|---|---|
| Name: | /name/ | Matrikelnummer: | /nr/ |
| Übungsleiter: | /uebleiter/ | | |
| 2. Name: | /namezwei/ | 2. Matrikelnummer: | /nrzwei/ |

Man achte auf eine saubere Darstellung und eine ordentliche Schrift.
Bitte keine maschinell erstellten Lösungen abgeben.

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Punkte | | | | | |

---

**1 . Aufgabe (6 Punkte):**
Es sei $K$ eine quadratische Erweiterung von $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie:

a) Ist $L/K$ eine unverzweigte quadratische Erweiterung - d.h. kein einziges Primideal aus $\mathcal{O}_K$ verzweigt in $L$ -, dann ist $L/\mathbb{Q}$ Galoissch mit Galoisgruppe $V_4$.

b) Ist $K/\mathbb{Q}$ nur an einer einzigen Stelle über $\mathbb{Q}$ verzweigt, dann gibt es keine solche Erweiterung $L/K$.

**2 . Aufgabe (6 Punkte):**
Es sei $K/\mathbb{Q}$ eine endliche Galoissche Erweiterung und $p$ eine Primzahl. Zeigen Sie:

a) Durch Lokalisierung $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ des Ganzheitsrings $\mathcal{O}$ nach einem Primideal $\mathfrak{p} \neq 0, (\mathfrak{p}|p)$ erhält man in kanonischer Weise eine nicht-archimedische Bewertung auf $K$, welche die $p-$Bewertung auf $\mathbb{Q}$ fortsetzt. Das heißt zu jedem Primideal $\mathfrak{p}|p$ gehört eine nicht-archimedische Bewertung $|.|_\mathfrak{p}$ auf $K$.

b) Jede Bewertungsfortsetzung von $|.|_p$ auf $\mathbb{Q}$ entsteht durch eine geeignete Einbettung in den algebraischen Abschluß von $\mathbb{Q}_p$: $K \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$.

**3 . Aufgabe (6 Punkte):**
Die in der vorangegangenen Aufgabe angegebene Bewertung $\mathfrak{p}$ versieht $\mathcal{O}_K$ mit einer Topologie. Zeigen Sie, daß die stetigen Automorphismen gerade durch diejenigen gegeben sind, welche in der Zerlegungsgruppe von $\mathfrak{p}$ enthalten sind.

**4 . Aufgabe (6 Punkte):**
Folgern Sie aus den ersten beiden Aufgaben des 4. Blatts, daß für einen algebraischen Zahlkörper $K/\mathbb{Q}$ vom Grad $n$ gilt:

a)
$$\sqrt{|d_K|} \geq \frac{n^n}{n!} \left(\frac{\pi}{4}\right)^{n/2}.$$

b) Es gibt nur endlich viele Zahlkörper mit beschränkter Diskriminante. Wieviele unverzweigte endliche Erweiterungen besitzt $\mathbb{Q}$?

**5 . Aufgabe (6 Punkte)** (Sonderaufgabe $\star$)**:**
Es sei $d$ eine quadratfreie ganze Zahl. Zeigen Sie:
Wenn $2 | h_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})}$ gilt, gibt es eine unverzweigte quadratische Erweiterung $K/\mathbb{Q}(\sqrt{d})$.