Übungen zur Algebraischen Zahlentheorie I
- 7. Blatt -

Prof. Dr. K. Wingberg
J. Bartels
.

WS 2009/2010
abzugeben bis Donnerstag, den 3. Dezember 2009 um 9:15 Uhr
in den Kästen neben dem Seifertraum

http://www.mathi.uni-heidelberg.de/∼bartels/Vorlesung

Name:	/name/	Matrikelnummer:	/nr/
Übungsleiter:	/uebleiter/		
2. Name:	/namezwei/	2. Matrikelnummer:	/nrzwei/

Man achte auf eine saubere Darstellung und eine ordentliche Schrift.
Bitte keine maschinell erstellten Lösungen abgeben.

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
Punkte					

---

1 . Aufgabe (6 Punkte):
Berechnen Sie die Klassengruppe der Zahlkörper

$$\mathbb{Q}(\sqrt{d}),\ \text{für } d = -21, -23.$$

2 . Aufgabe (6 Punkte):
Zeigen Sie: Ist L/K eine endliche Erweiterung algebraischer Zahlkörper, dann ist ein Primideal $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_K$ genau dann in L voll zerlegt, wenn es in der normalen Hülle N/K voll zerlegt ist.
Hinweis: Man verwende die Doppelnebenklassenzerlegung $H \setminus G/G_{\mathfrak{P}}$, wobei $G = Gal(N/K)$, $H = Gal(N/L)$ und $G_{\mathfrak{P}}$ die Zerlegungsgruppe eines Primideals $\mathfrak{P}$ über $\mathfrak{p}$ ist.

3 . Aufgabe (6 Punkte): a) Ist A ein Dedekindring, dann ist die Lokalisierung $S^{-1}A$ nach einem maximalen Ideal $\mathfrak{p}$ - d.h. $S = A \setminus \mathfrak{p}$ - ein Hauptidealring.

b) Es sei A ein nullteilerfreier Ring mit einer multiplikativ abgeschlossenen Menge S, welche 1, aber nicht 0 enthält. Ferner sei $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal von A mit $\mathfrak{m} \cap S = \emptyset$. Dann gilt:

$$S^{-1}A/\mathfrak{m}S^{-1}A \cong A/\mathfrak{m}.$$

4 . Aufgabe (6 Punkte):
Erinnerung: Wenn A ein Teilring von B ist, und B ein freier $A-$Modul vom Rang n, dann ist die Diskriminante des Systems $(b_1, ..., b_n) \in B^n$ durch $d(b_1, ..., b_n) = det((Tr_{B/A}(b_i b_j))_{i,j})$ definiert. Die Diskriminante $\mathfrak{D}_{B/A}$ von B über A ist das Ideal, welches von den Diskriminanten aller Basen von B über A erzeugt wird. Zeigen Sie:

a) Sind $B_1, ..., B_q$ Ringe, welche A enthalten und über A freie Moduln endlichen Rangs sind, dann gilt für $B = \prod B_i$ die Formel

$$\mathfrak{D}_{B/A} = \prod_i \mathfrak{D}_{B_i/A}.$$

Wenn A ein Körper ist, dann verschwindet die Diskriminante $\mathfrak{D}_{B/A}$ genau dann, wenn B nilpotente Elemente besitzt.

b) Sind $A \subset B$ Ganzheitsringe zweier ineinander liegender Zahlkörper, dann verzweigt ein Primideal $\mathfrak{p} \neq (0)$ in B genau dann, wenn $\mathfrak{p}$ das Diskriminantenideal $\mathfrak{D}_{B/A}$ umfaßt.