Übungen zur Algebraischen Zahlentheorie I

- 5. Blatt -

Prof. Dr. K. Wingberg
J. Bartels

WS 2009/2010
abzugeben bis Donnerstag, den 19. November 2009 um 9:15 Uhr
in den Kästen neben dem Seifertraum

.

http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~bartels/Vorlesung

Name:	/name/	Matrikelnummer:	/nr/
Übungsleiter:	/uebleiter/		
2. Name:	/namezwei/	2. Matrikelnummer:	/nrzwei/

Man achte auf eine saubere Darstellung und eine ordentliche Schrift.
Bitte keine maschinell erstellten Lösungen abgeben.

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
Punkte					

---

1 . Aufgabe (6 Punkte):
Berechnen Sie die Grundeinheiten der folgenden Körper

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}), \mathbb{Q}(\sqrt{3}) \text{ und } \mathbb{Q}(\sqrt{7}).$$

2 . Aufgabe (6 Punkte):
Berechnen Sie die Grundeinheiten der folgenden Körper

$$\mathbb{Q}(\sqrt{5}), \mathbb{Q}(\sqrt{13}) \text{ und } \mathbb{Q}(\sqrt{17}).$$

3 . Aufgabe (6 Punkte):
Es sei $K := \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, wobei d eine quadratfreie ganze Zahl sei. Wir haben gesehen, daß für die Zerlegung einer Primzahl p in $\mathcal{O}_K$ die folgenden Fälle auftreten können:

$$p\mathcal{O}_K = \begin{cases} \mathfrak{p} & \text{mit } \mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_K \text{ prim.} \\ \mathfrak{p}_1 . \mathfrak{p}_2 & \text{mit } \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2 \subset \mathcal{O}_K \text{ prim.} \\ \mathfrak{p}^2 & \text{mit } \mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_K \text{ prim.} \end{cases}$$

Im ersten Fall spricht man davon, daß p in $\mathcal{O}_K$ „träge“ ist, im zweiten Fall „voll zerlegt“ und im dritten „verzweigt“. Zeigen Sie, daß p in $\mathcal{O}_K$

a) träge ist, wenn d kein Quadrat modulo p ist oder $p = 2$ gilt und dann $d \equiv 5 \mod 8$ ist.

b) voll zerlegt ist, wenn d ein Quadrat modulo p ist oder $p = 2$ und $d \equiv 1 \mod 8$ gilt.

c) verzweigt, wenn p ein Teiler von d ist oder $p = 2$ und $d \equiv 2, 3 \mod 4$ gilt.

4 . Aufgabe (6 Punkte):
Es sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ der quadratische Zahlkörper mit Diskriminante $D < 0$ und $D \equiv 0, 1 (mod\ 4)$. Wir betrachten das Ideal

$$J = a\mathbb{Z} + \frac{b + \sqrt{D}}{2}\mathbb{Z} \text{ mit } |b| \leq a \leq c := \frac{b^2 - D}{4a}$$

aus $\mathcal{O}_K$.

a) Zeigen Sie, daß für $x, y \in \mathbb{Q}$ die Aussage $N(ax + \frac{b+\sqrt{D}}{2}y) = a(ax^2 + bxy + cy^2)$ gilt und für $x, y \in \mathbb{Z}$ dieser Wert $\geq a^2$ ist, sofern nicht beide Parameter gleichzeitig null sind.

b) Ein solches Ideal J heißt reduziert. Zeigen Sie, daß wenn $y \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ ist, $a(ax^2+bxy+cy^2) \geq ac$ gilt und diese untere Schranke auch angenommen wird. Folgern Sie, daß jede Idealklasse dieses Körpers ein reduziertes Ideal enthält.