Übungen zur Algebraischen Zahlentheorie I

- 4. Blatt -

Prof. Dr. K. Wingberg
J. Bartels

WS 2009/2010
abzugeben bis Donnerstag, den 12. November 2009 um 9:15 Uhr
in den Kästen neben dem Seifertraum

http://www.mathi.uni-heidelberg.de/∼bartels/Vorlesung

Name:	/name/	Matrikelnummer:	/nr/
Übungsleiter:	/uebleiter/		
2. Name:	/namezwei/	2. Matrikelnummer:	/nrzwei/

Man achte auf eine saubere Darstellung und eine ordentliche Schrift.
Bitte keine maschinell erstellten Lösungen abgeben.

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
Punkte					

---

1 . Aufgabe (6 Punkte):
Es sei K ein Zahlkörper. Zeigen Sie, daß die konvexe zentralsymmetrische Menge

$$X = \{(z_\tau) \in K_{\mathbb{R}} | \sum_\tau |z_\tau| < t\}$$

das Volumen $vol(X) = 2^r \pi^s \frac{t^n}{n!}$ hat.

2 . Aufgabe (6 Punkte):
Es sei K ein Zahlkörper und $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_K$ ein ganzes Ideal $\neq 0$. Für $a \neq 0$ aus $\mathfrak{a}$ gilt dann

$$|N_{K/\mathbb{Q}}(a)| \leq M(\mathcal{O}_K : \mathfrak{a}) = M\mathfrak{N}(\mathfrak{a}),$$

wobei $M = \frac{n!}{n^n}(\frac{4}{\pi})^s\sqrt{|d_K|}$ ist. Folgern Sie daraus, daß jede Idealklasse aus Cl_K über ein ganzes Ideal $\mathfrak{b}$ verfügt, für dessen Norm

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{b}) \leq \left(\frac{4}{\pi}\right)^s \frac{n!}{n^n}\sqrt{|d_K|} \text{ gilt.}$$

3 . Aufgabe (6 Punkte):
Berechnen Sie die Primfaktorzerlegung von (3) im Ganzheitsring von $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{17})$.

4 . Aufgabe (6 Punkte):
Es sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ der quadratische Zahlkörper mit Diskriminante $D < 0$ und $D \equiv 0, 1 (mod\, 4)$.

a) Zeigen Sie, daß jede Idealklasse ein Ideal

$$J = a\mathbb{Z} + \frac{b+\sqrt{D}}{2}\mathbb{Z} \text{ mit } |b| \leq a \leq c := \frac{b^2 - D}{4a}$$

enthält und daß man $b \geq 0$ annehmen kann, für den Fall, daß eines der obigen„$\leq$" ein „$=$" ist.

b) Zeigen Sie, daß $\mathfrak{N}(J) = a \leq \sqrt{|D|/3}$ gilt und vergleichen Sie diesen Wert mit der oberen Schranke für die Norm aus der 2. Aufgabe.