Übungen zur Algebraischen Zahlentheorie I

- 3. Blatt -

Prof. Dr. K. Wingberg
J. Bartels
.

WS 2009/2010
abzugeben bis Donnerstag, den 5. November 2009 um 9:15 Uhr
in den Kästen neben dem Seifertraum

http://www.mathi.uni-heidelberg.de/∼bartels/Vorlesung

Name:	/name/	Matrikelnummer:	/nr/
Übungsleiter:	/uebleiter/		
2. Name:	/namezwei/	2. Matrikelnummer:	/nrzwei/

Man achte auf eine saubere Darstellung und eine ordentliche Schrift.
Bitte keine maschinell erstellten Lösungen abgeben.

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
Punkte					

---

1 . Aufgabe (6 Punkte):
Es sei F ein Zahlkörper, p eine Primzahl und R ein Teilring von endlichem Index in $\mathcal{O}_F$. Man setze $N := \{x \in R | x \mod pR \text{ ist nilpotent.}\}$, $R' := \{x \in \mathcal{O}_F | xN \subseteq N\}$ und $R'' := \{x \in \mathcal{O}_F | px \in R\}$. Zeigen Sie:

a)
$$R' = R''.$$

b) Es ist $R = R'$ genau dann, wenn die Abbildung
$$m : R/pR \to End(N/pN), x \mapsto m_x,$$
wobei m_x die Multiplikation mit x bedeutet, injektiv ist. Wenn m nicht injektiv ist, gilt für jeden Vertreter $x \in R$ eines nichttrivialen Elements aus dem Kern
$$R \subsetneq R[\frac{x}{p}] \subseteq \mathcal{O}_F.$$

2 . Aufgabe (6 Punkte) (Anwendung der ersten Aufgabe)**:**
Berechnen Sie den Ganzheitsring von $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{17})$.

3 . Aufgabe (6 Punkte) (Wiedersehen mit 2. Blatt, 4. Aufgabe)**:**
Es sei $K = \mathbb{Q}(\alpha)$, wobei α eine Nullstelle des Polynoms $f(X) = X^3 + X^2 - 2X + 8$ ist. Mit $\beta := \frac{4}{\alpha}$ ist der Ganzheitsring $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\alpha, \beta]$ nach der 4. Aufgabe des letzten Blatts.

a) Zerlegen Sie das Ideal (2) darin in seine Primfaktoren und folgern Sie, daß es keine über $\mathbb{Q}$ algebraische Größe γ gibt, für die sich $\mathcal{O}_K$ als $\mathbb{Z}[\gamma]$ schreiben läßt.

b) Für jedes primitive Element $\gamma \in \mathcal{O}_K$ gilt: $2 | (\mathcal{O}_K : \mathbb{Z}[\gamma])$.

4 . Aufgabe (6 Punkte):
Es sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ der quadratische Zahlkörper mit Diskriminante $D < 0$ und $D \equiv 0, 1 (mod\, 4)$.
a) Zeigen Sie, daß sich jedes Ideal I folgendermaßen schreiben läßt

$$\delta(a\mathbb{Z} + \frac{b + \sqrt{D}}{2}\mathbb{Z}) \text{ mit } a, b, \delta \in \mathbb{Z}, a > 0,$$

wobei

$$b^2 \equiv D (mod\, 4a), |b| \leq a.$$

Umgekehrt stellt jede solche Menge ein Ideal I dar, für dessen Index $(\mathcal{O}_K : I) = a\delta^2$ gilt und dessen Schnitt mit $\mathbb{Z}$ durch $I \cap \mathbb{Z} = \delta a \mathbb{Z}$ beschrieben wird.
b) Es sei $c := \frac{b^2 - D}{4a}$. Zeigen Sie, daß

$$(c, \frac{-b + \sqrt{D}}{2})^{-1}.I$$

ein Hauptideal ist.